Álgebra lineal
Evaluación continua
Grupo C
9 de Noviembre de 2011

1. Se definen las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & i & 0 & i \\ 2i & 0 & i & -1 \\ 0 & i & -1+i & 1 \\ 0 & 0 & 1+i & 3-2i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{C}) \,, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})\,.$$

   1) Calcular, si existe, la factorización LU de A.
   2) Resolver el SEL $Ax = b$, siendo $b = (0, 0, 2i, 3 + 4i)^t$.
   3) Razonar si es posible encontrar una matriz no nula $X \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{C})$ tal que $AX = 0$.
   4) Calcular el rango de AB.
   5) Dar la dimensión y una base de $\mathrm{Im}(B)$ y $\ker(B)$.
   6) Razonar si la matriz simétrica $B + B^t$ admite factorización de Cholesky.
   7) Encontrar, si es posible, vectores b_1, b_2, $b_3 \in \mathbb{R}^4$ tales que
      a) el SEL $Bx = b_1$ sea incompatible.
      b) el SEL $Bx = b_2$ sea compatible determinado.
      c) el SEL $Bx = b_3$ sea compatible indeterminado.

      Obtener, en su caso, la solución del SEL.

2. Sea A una matriz cuadrada de tamaño impar verificando que $AA^t = I$ y que $\det(A) = 1$. Demostrar que $\det(A - I) = 0$.