Álgebra lineal
Evaluación continua
Grupo C
19 de Diciembre de 2011

1. Sea $n \in \mathbb{N}$ un número par. Sean α, $\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha \neq \beta$. Sean

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \ , \quad A = \begin{pmatrix} \alpha J & \beta I \\ \beta I & \alpha J \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n\times 2n}(\mathbb{R}).$$

   a) ¿Es A simétrica?
   b) Demostrar que $\alpha + \beta$ es autovalor de A.
   c) Decir, justificando la respuesta, si la forma cuadrática $\omega\colon x \in \mathbb{R}^{2n} \to \omega(x) = x^t A x$ es definida positiva, semidefinida positiva, definida negatica, semidefinida negativa o indefinida.
   d) Sean $n = 2$, $\alpha = 1$ y $\beta = 2$.
      d1) Hallar, si es posible, una matriz ortogonal $Q \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$ y una matriz diagonal $D \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$ tales que $Q^t A Q = D$.
      d2) Hallar una descomposición en valores singulares de A.
      d3) Hallar las aproximaciones de rango uno y de rango dos de A.

2. Aproximar, por un polinomio de segundo grado $q(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$, en el sentido de los mínimos cuadrados, los puntos del plano $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, -1)$, $(2, 1)$.