Álgebra lineal
Evaluación continua
Grupo A
31 de Octubre de 2012

1. a) Hallar, si es posible, una matriz $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ que verifique que $A \neq 0$ y $A^2 = 0$.
   b) Hallar, si es posible, una matriz $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ que verifique que $A \neq 0$, $A^2 \neq 0$ y $A^3 = 0$.
   c) Hallar, si es posible, matrices A, B, $C \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ que verifiquen que $A \neq B$, $C \neq 0$ y $AC = BC$.

2. Sean $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ y $b \in \mathbb{R}^4$ dados por

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) Denotando $D_n = \det(A)$, demostrar que se verifica la fórmula de recurrencia $D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}$.
   (b) Calcular $\det(A)$.
   (c) Para $n = 4$:
      c1) Calcular, si existe, la factorización LU de A.
      c2) Calcular, si existe, la factorización de Cholesky de A.
      c3) Calcular, si existe, la inversa de A.
      c4) Resolver el SEL $Ax = b$.
      c5) Sea $B \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$ la matriz obtenida de A sustituyendo la última columna por el vector b. Dar una base del núcleo y la imagen de B. Resolver el SEL $Bx = b$.