Álgebra lineal
Evaluación continua
Grupo B
31 de Octubre de 2012

1. Considera la matriz real A_n, cuadrada de orden $n+1$, y el vector $b \in \mathbb{R}^4$ dados por:

$$A_n = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 1 & \dots & 1 \\ \hline 1 & \alpha & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & \alpha \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & x^t \\ \hline x & \alpha I_n \end{array}\right), \text{ donde } x = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,\ \alpha \in \mathbb{R}, \text{ y } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Usando intercambios de filas y columnas demuestra $\det(A_n) = \alpha \det(A_{n-1}) - \alpha^{n-1}$.

   (b) Calcula $\det(A_n)$.

   (c) Sea $A = A_3$ con el valor de $\alpha = 1$.

      i. Calcula la inversa de A.

      ii. Razona si existen las factorizaciones LU y de Choleski de A.

      iii. Resuelve el sistema $Ax = b$.

      iv. Considera la matriz $X = A + 2I$. ¿Admite X factorización de Cholesky? Calcula, si es posible, la factorización LU de X.

   (d) Siendo $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, resuelve el sistema $(A+B)x = b$. Halla la dimensión y da una base del núcleo y lo mismo de la imagen de la aplicación lineal definida por la matriz $A+B$.

2. Sea

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3+i}{2-i} & e^{\frac{\pi}{4}i} & -i \\ \frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{4}i} & e^{\frac{3\pi}{2}i} & -i \\ -1+i & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{C}).$$

   (a) Reescribe A expresando todos sus elementos en forma binómica y calcula su determinante.

   (b) Calcula el producto AA^* y su parte real $B = \mathrm{Re}(AA^*)$.

   (c) Calcula la matriz inversa de B.

   (d) Averigua si B admite factorización de Choleski y en caso afirmativo calcúlala.