Nombre y apellidos: ______________________________ DNI: __________

no escribir en esta caja

nota sobre **12**

TERCERA PRUEBA DE EVALUACIÓN CONTINUA

15 de noviembre de 2012

Las tres preguntas de este examen, se refieren a la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R}).$$

Pregunta 1

(4 pt.)

Calcula los autovalores de A indicando la multiplicidad algebraica de cada uno de ellos.

Solución:

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 & 0 & 3 \\ -1 & -\lambda & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2-\lambda & 3 \\ 1 & 2 & -1 & -\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow[F_1 - F_3]{F_2 + F_4} \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & -2+\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 2-\lambda \\ 0 & 3 & 2-\lambda & 3 \\ 1 & 2 & -1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[C_4 - C_2]{C_3 + C_1} \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -2-\lambda \end{pmatrix}.$$

autovalores	multipl. algebr.
$\lambda_1 = 2$	3
$\lambda_2 = -2$	1

Nombre y apellidos: ______________________________ DNI: __________

Pregunta 2

(4 pt.)

Para cada uno de los autovalores de A halla su multiplicidad geométrica y una base del subespacio propio asociado.

Solución:

Autovalor $\lambda_1 = 2$: La matriz característica es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Las ecuaciones del subespacio propio son:

$$\begin{aligned} 3x_2 + 3x_4 = 0; &\quad x_2 = -x_4. \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0; &\quad x_1 = -2x_2 + x_3 + 2x_4 = 2x_4 + x_3 + 2x_4 = x_3 + 4x_4 \end{aligned}$$

es decir:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad \text{m.g.}(\lambda_1) = 2; \quad \text{base subesp. propio} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Autovalor $\lambda_1 = -2$: La matriz característica es:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Resolviendo el sistema homogéneo se obtiene: $x_1 = 0$, $x_2 = -x_4$, $x_3 = 0$; es decir:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad \text{m.g.}(\lambda_1) = 1; \quad \text{base subesp. propio} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Nombre y apellidos: ______________________________ DNI: __________

Pregunta 3

(4 pt.)

¿Es A diagonalizable?. ¿Existe una base de $\mathbb{R}^4$ formada por autovectores de A?. Razona tu respuesta.

Solución:

No existe una base de $\mathbb{R}^4$ formada por autovectores de A (y por tanto A no es diagonalizable) porque la suma de las dimensiones de los subespacios propios (que es $2 + 1 = 3$) es menor que la dimensión de $\mathbb{R}^4$ (que es 4).