

**Álgebra lineal**  
**Evaluación continua**  
*Grupo B*  
*5 de Diciembre de 2012*

1. Demostrar el Teorema de Pitágoras: Para cualesquiera  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\langle x, y \rangle = 0 \Leftrightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

2. Sea  $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ .

- i) ¿Es  $M$  normal, es decir, conmuta  $M$  con su traspuesta conjugada?
- ii) Obtener, si es posible, una diagonalización unitaria de  $M$ .

3. Sean  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  y  $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ .

- i) Calcular la aproximación de rango uno de  $A$ .
- ii) Calcular la descomposición en valores singulares de  $A$ .
- iii) Obtener la solución del problema de mínimos cuadrados para el S.E.L.  $Ax = b$ .

4. Clasificar la forma cuadrática

$$\omega(x) = x_1^2 + 2x_2x_4 - 4x_3x_4 + 4x_4^2.$$

Encontrar, si es posible, vectores  $x, y \in \mathbb{R}^4$  tales que  $\omega(x) > 0$  y  $\omega(y) < 0$ .