

Nombre y apellidos: _____ **S O L U C I O N E S** _____ DNI: _____

Primer examen de ev. cont – P

no escribir en esta caja

nota sobre 10

Pregunta 1

(5 pt.)

Sean $z = -2 - i$, y $w = 2e^{i\pi/4}$.

(.5 pt.) (a) Representa gráficamente en un mismo sistema de coordenadas los números complejos z , $\bar{z}$, w , $\bar{w}$.
(Recuerda: Un solo par de ejes coordenados con los cuatro puntos representados.)

(1.5 pt.) (b) Calcula la parte real, la parte imaginaria, el módulo y el argumento de los siguientes números:

$$z\bar{z}, \quad \frac{\bar{z}}{z}, \quad zw.$$

(1 pt.) (c) Sabiendo que la función seno hiperbólico está definida por $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, usa la fórmula de Euler para comprobar que

$$\sinh\left(i\frac{\pi}{3}\right)$$

es un número imaginario puro y calcula su valor.

(2 pt.) (d) Como el polinomio $x^4 + 16$ tiene coeficientes reales, sabemos que las soluciones no reales de

$$x^4 + 16 = 0$$

aparecen en pares conjugados. Halla las 4 soluciones de dicha ecuación y comprueba que las no reales forman pares conjugados.

Solución:

(a)

$$(b) \quad z\bar{z} = 2^2 + 1^2 = 5 = 5 + 0i. \quad \bar{z}/z = \bar{z}^2/5 = \frac{4 - 1 - 4i}{5}.$$

$$zw = \sqrt{5}e^{i(\pi + \arctan \frac{1}{2})} \cdot 2e^{\frac{\pi}{4}} = (-2 - i)2(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}) = -\sqrt{2}(1 + 3i).$$

Así que las respuestas son:

	Re	Im	$ \cdot $	arg
$z\bar{z}$	5	0	5	0
$\frac{\bar{z}}{z}$	3/5	-4/5	1	$\arctan(-4/3)$
zw	$-\sqrt{2}$	$-3\sqrt{2}$	$2\sqrt{5}$	$\frac{5\pi}{4} \arctan(1/2)$

$$(c) \quad \sinh\left(i\frac{\pi}{3}\right) = \frac{e^{i\frac{\pi}{3}} - e^{-i\frac{\pi}{3}}}{2} = \frac{1}{2}(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}) = i \sin \frac{\pi}{3} = i\sqrt{3}/2.$$

(d) Las soluciones son las cuatro raíces cuartas de -16 que son el doble de las cuatro raíces cuartas de -1 . Estas últimas son las dos raíces cuadradas de i y las dos raíces cuadradas de $-i$. Así que:

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i), \quad x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i), \quad x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i), \quad x_4 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i).$$

Nombre y apellidos: _____ **S O L U C I O N E S** _____ DNI: _____**Pregunta 2**

(5 pt.)



Contesta los siguientes apartados suponiendo que A es una matriz que cumple: (1) tiene 3 filas y 4 columnas, (2) tiene forma escalonada, (3) su última columna es una columna pivote, (4) tiene en total 2 columnas pivote y (5) contiene un bloque igual a la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

- (1 pt.) (a) Contesta razonadamente: El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ¿tiene alguna solución no trivial?. El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ¿tiene solución (es consistente) para todo $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^3$?
- (1 pt.) (b) Escribe un vector $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$ y escribe un vector no nulo $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$ tales que el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ sea inconsistente y el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sea consistente.
- (3 pt.) (c) Escribe una matriz que cumpla las propiedades de la matriz A arriba indicadas y halla la solución general del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ escribiéndola en forma vectorial paramétrica (toma para $\mathbf{b}$ el vector que escribiste en el apartado anterior).

Solución:

- (a) El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene solución no trivial porque la matriz de coeficientes tiene dos columnas sin pivote. El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ no tiene solución para todo $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^3$ porque la matriz de coeficientes tiene una fila de ceros.
- (b) Para $\mathbf{y}$ basta que el tercer elemento sea no nulo y para $\mathbf{b}$ basta que el tercer elemento sea nulo::

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- (c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ya está en forma escalonada reducida y la solución es:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$