Nombre y apellidos: ____________________ DNI: __________

no escribir en esta caja

Ev. continua 2

6 de noviembre de 2013 – Aula B5

nota sobre **12**

Pregunta 1

(4 pt.)

Supongamos que U y V son subespacios vectoriales de $\mathbf{R}^4$ tales que $\dim U = 2$ y $\dim V = 3$

(0.5 pt.) (a) ¿Cuántas ecuaciones son necesarias para definir a U?. ¿Y para definir a V?.

(0.5 pt.) (b) ¿Cuáles son los posibles valores de $\dim(U \cap V)$ y de $\dim(U+V)$?.

Supongamos ahora que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad U = \operatorname{Nul} A, \quad \text{y} \quad V \text{ está definido por la ecuación} \quad x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0,$$

(3 pt.) (c) Halla una base de U, una base de V, una base de $U \cap V$ y una base de $U+V$.

Solución:

(a) El número de ecuaciones necesarias para definir un subespacio de $\mathbf{R}^n$ de dimensión p es $n-p$, luego para definir U son necesarias $4-2=2$ ecuaciones y para definir V son necesarias $4-3=1$ ecuación.

(b) $\dim(U+V)$ es mayor o igual que la mayor de las dimensiones $\dim U$ y $\dim V$ y menor o igual que la dimensión de $\mathbf{R}^4$, luego $\dim(U+V)$ sólo puede ser 3 ó 4. Por la fórmula de Grassmann $\dim(U \cap V) = \dim U + \dim V - \dim(U+V)$, luego $\dim(U \cap V)$ sólo puede ser $5-3=2$ ó $5-4=1$.

(c) Haciendo $F_1 - 2F_2$, $A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, que en ecuaciones es: $\begin{cases} x_1 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$ y en forma vectorial paramétrica:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{luego} \quad \mathcal{B}_U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Para la base de V escribimos la solución de su ecuación en forma vectorial paramétrica:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{luego} \quad \mathcal{B}_V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Las ecuaciones de $U \cap V$ son las de U junto con la de V. Resolviendo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_{U \cap V} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

luego $\dim(U \cap V) = 1$, $\dim(U+V) = 4$, $U + V = \mathbf{R}^4$ y $\mathcal{B}_{U+V} =$ base canónica de $\mathbf{R}^4$ o también la base de V junto con un vector cualquiera de la base de U que no cumpla la ecuación de V.

Nombre y apellidos: ______________________________ DNI: ____________

Pregunta 2

(4 pt.)

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 6 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

y recuerda que el espacio fila de una matriz es el espacio columna de su traspuesta.

(0.5 pt.) (a) ¿Cuántas ecuaciones definen el espacio fila de A?. Razona tu respuesta.

(1.5 pt.) (b) Halla las ecuaciones del espacio fila de A.

(1.5 pt.) (c) Halla una base del espacio nulo de A.

(0.5 pt.) (d) ¿Qué espacio conocido es el espacio columna de A?.

Solución:

(a) $\mathrm{Fil}\,A$ es un subespacio de $\mathbf{R}^7$ de dimensión 3, luego está definido por $7-3=4$ ecuaciones.

(b) $\mathrm{Fil}\,A = \mathrm{Col}\,A^{\mathrm{T}}$ está definido paramétricamente por:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = p\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \\ 6 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ 3p+2q \\ r \\ p+2q+3r \\ 2p+6q+3r \\ -p-4q-r \\ q \end{pmatrix} \quad \text{luego} \quad \begin{cases} x_2 = 3x_1 + 2x_7 \\ x_4 = x_1 + 3x_3 + 2x_7 \\ x_5 = 2x_1 + 3x_3 + 6x_7 \\ x_6 = -x_1 - x_3 - 4x_7 \end{cases}$$

(c) $\mathrm{Nul}\,A$ es el conjunto de vectores $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^7$ tales que $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Como A está en forma escalonada, vemos que este sistema tiene tres variables básicas y cuatro libres. Escribiendo las ecuaciones vemos que podemos despejar como variables básicas x_1, x_3 y x_7:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_4 + 2x_5 - x_6 = 0 \\ 2x_2 + 2x_4 + 6x_5 - 4x_6 + x_7 = 0 \\ x_3 + 3x_4 + 3x_5 - x_6 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -3x_2 - x_4 - 2x_5 + x_6 \\ x_7 = -2x_2 - 2x_4 - 6x_5 + 4x_6 \\ x_3 = -3x_4 - 3x_5 + x_6 \end{cases}$$

En forma vectorial:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = x_2\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + x_4\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + x_5\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} + x_6\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Los cuatro vectores que aquí aparecen forman la base de $\mathrm{Nul}\,A$.

(d) $\mathrm{Col}\,A$ es un subespacio de tres dimensiones de $\mathbf{R}^3$ luego es todo $\mathbf{R}^3$: $\mathrm{Col}\,A = \mathbf{R}^3$.

Nombre y apellidos: ______________________________ DNI: __________

Pregunta 3

(4 pt.)

Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_h = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ h \end{pmatrix}.$$

(1 pt.) (a) Halla el determinante de A.

(2 pt.) (b) Halla las matrices L, U de la factorización LU de A y halla la matriz inversa de L.

(1 pt.) (c) Halla el valor de h para el que el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_h$ sea consistente. Para ese valor de h usa la factorización LU de A para resolver el sistema.

Solución:

(a)

$$A \xrightarrow{F_3-F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3+2F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_4+F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

de donde $\det A = 0$.

(b) Por lo anterior: $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

La inversa de L se puede obtener haciendo sobre la matriz identidad las mismas tres operaciones elementales del apartado (a):

$$I_4 \xrightarrow{F_3-F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3+2F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_4+F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = L^{-1},$$

(c) Dado que la útima fila de U es de ceros, el vector $\mathbf{b}_h$ tiene que cumplir que el último elemento de $L^{-1}\mathbf{b}_h$ es igual a cero para que el sistema $U\mathbf{x} = L^{-1}\mathbf{b}_h$ sea consistente:

$$L^{-1}\mathbf{b}_h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2+h \end{pmatrix}$$

luego $h = -2$ y el sistema a resolver tiene la siguiente matriz ampliada:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{y solución:} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$