# Ev. continua 2

6 de noviembre de 2013 – Aula B5

---

**1.** Supongamos que $U$ y $V$ son subespacios vectoriales de $\mathbf{R}^4$ tales que $\dim U = 2$ y $\dim V = 3$

(a) ¿Cuántas ecuaciones son necesarias para definir a $U$?. ¿Y para definir a $V$?.
(b) ¿Cuáles son los posibles valores de $\dim(U \cap V)$ y de $\dim(U + V)$?.

Supongamos ahora que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad U = \operatorname{Nul} A, \quad \text{y} \quad V \text{ está definido por la ecuación} \quad x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0,$$

(c) Halla una base de $U$, una base de $V$, una base de $U \cap V$ y una base de $U + V$.

---

**2.** Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 6 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

y recuerda que el espacio fila de una matriz es el espacio columna de su traspuesta.

(a) ¿Cuántas ecuaciones definen el espacio fila de $A$?. Razona tu respuesta.
(b) Halla las ecuaciones del espacio fila de $A$.
(c) Halla una base del espacio nulo de $A$.
(d) ¿Qué espacio conocido es el espacio columna de $A$?.

---

**3.** Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_h = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ h \end{pmatrix}.$$

(a) Halla el determinante de $A$.
(b) Halla las matrices $L$, $U$ de la factorización LU de $A$ y halla la matriz inversa de $L$.
(c) Halla el valor de $h$ para el que el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_h$ sea consistente. Para ese valor de $h$ usa la factorización LU de $A$ para resolver el sistema.

---

**4.**

(a) Sean $n \in \mathbb{N}$ un número par y

$$A = \begin{pmatrix} 1+\alpha & 2 & 1 & 2 & \cdots & 1 & 2 \\ 1 & 2+\alpha & 1 & 2 & \cdots & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1+\alpha & 2 & \cdots & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2+\alpha & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & & \\ 1 & 2 & 1 & 2 & \cdots & 1+\alpha & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & \cdots & 1 & 2+\alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}),$$

$$u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^6, \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

Se pide:

a) Carcular $\det(A)$.

b) ¿Para qué valores de $\alpha$ es $A$ inversible?

c) Calcular las ecuaciones del subespacio $U$ generado por el sistema de vectores $S = \{u_1, u_2\}$.

d) Para $n = 4$ y $\alpha = -2$

  d1) Obtener, si es posible, la factorización $LU$ de $A$.

  d2) Resolver, si es posible, el SEL $Ax = b$ usando la factorización $LU$ de $A$.

  d3) Calcular $A^{-1}$, si existe.

e) Para $n = 6$ y $\alpha = 0$

  e1) Escribir la aplicación lineal $f$ definida por la matriz $A$.

  e2) Dar la dimensión y una base del núcleo de $f$ y de la imagen de $f$.

  e3) Dar la dimensión y una base de la intersección $\ker(f) \cap U$.

  e4) Dar la dimensión y una base del subespacio suma $\ker(f) + U$.

(b) Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} e^{\frac{3\pi}{2} i} & 1 - \sqrt{3}i \\ 2\, e^{\frac{11\pi}{6} i} & \frac{4}{1+i} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbf{C}),$$

se pide

i) Expresar la matriz $A$ con todos sus coeficientes en forma binómica.

ii) Calcular el determinante de la matriz haciendo las operaciones en forma binómica.

iii) Escribir el resultado del apartado anterior en forma exponencial.

(c) Sean $A$, $B$, $C \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ matrices inversibles. Sea

$$M = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & A \\ \hline I & B & 0 \\ \hline C & 0 & 0 \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{3n\times 3n}(\mathbb{K}).$$

Demostrar que $M$ es inversible encontrando para $M^{-1}$ una expresión en función de $A$, $B$ y $C$.

---