Nombre y apellidos: ______________________________ DNI: __________

no escribir en esta caja

Eval. continua III

nota sobre **12**

Pregunta 1

(3 pt.)

Sean P y D las siguientes matrices:

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y sea $A = PDP^{-1}$.

(1 pt.) (a) Halla el polinomio característico de A, $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.

(1 pt.) (b) Halla una base de cada espacio propio de A.

(1 pt.) (c) Calcula la matriz $A^{10}P$.

Solución:

(a) El polinomio característico de A es el mismo que el de $P^{-1}AP = D$, luego

$$p_A(\lambda) = (2-\lambda)^2(1-\lambda).$$

(b) La base del espacio propio de $\lambda_1 = 2$ está formada por las dos primeras columnas de P y la base del espacio propio de $\lambda_2 = 1$ está formada por la tercera columna de P:

$$E_2 = \mathrm{Col}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_1 = \mathrm{Col}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(c)

$$A^{10}P = (PDP^{-1})^{10}P = PD^{10}P^{-1}P = PD^{10}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{10} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1^{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2^{11} & 0 & -1 \\ 0 & 2^{10} & 2 \\ 2^{10} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nombre y apellidos: ____________________ DNI: __________

Pregunta 2

(5 pt.)

Sea A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & h & 7 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2 pt.) (a) Halla el valor de h que hace que la matriz A sea diagonalizable.

(3 pt.) (b) Utilizando para h el valor que hace que A sea diagonalizable, diagonaliza la matriz A, es decir, halla una matriz inversible P tal que $P^{-1}AP$ sea una matriz diagonal.

Solución:

(a) Los autovalores de A son 1, 3 y 5, los dos primeros con multiplicidad algebraica 1 y el último con multiplicidad algebraica 2. Luego A es diagonalizable si y sólo si $A - 5I$ tiene dos columnas no pivote y dos columnas pivote. Escalonando $A - 5I$,

$$A - 5I = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & -2 & h & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & h-6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$A - 5I$ tiene dos pivotes si y sólo si $h - 6 = 0$, luego $\boxed{h = 6}$.

(b) Con lo anterior ya tenemos la mitad del camino hecho para hallar una base del espacio propio de $\lambda_1 = 5$ continuamos el proceso para hallar la forma escalonada reducida de $A - 5I$:

$$A - 5I \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{luego} \quad E_5 = \text{Col} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora buscamos una base de $E_3 = \text{Nul}(A - 3I)$ y una de $E_1 = \text{Nul}(A - I)$.

Para E_3:

$$A - 3I = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{luego} \quad E_3 = \text{Col} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Para E_1:

$$A - I = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 2 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{luego} \quad E_3 = \text{Col} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Luego:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nombre y apellidos: ______________________________ DNI: __________

Pregunta 3

(4 pt.)

Sea A una matriz cuadrada cuyo polinomio característico es $p_A(x) = x^3 - 4x$.

(1 pt.) (a) ¿Cuál es el valor del determinante de A?.

(1 pt.) (b) ¿Cuál es el valor de la traza de A?.

Considera ahora el polinomio $q(x) = x^4 - 4$ y sea B la matriz $B = q(A)$.

(1 pt.) (c) ¿Cuál es el valor del determinante de B?.

(1 pt.) (d) ¿Cuál es el valor de la traza de B?.

Solución:

(a) Puesto que cero es una raíz de su polinomio característico, $\det A = 0$.

(b) Los autovalores no nulos de A son las raíces de $x^2 - 4$, es decir, ± 2, luego la traza de A es la suma de los autovalores: $\mathrm{Tr}A = 0 + 2 - 2 = 0$.

(c) La matriz A es diagonalizable por tener todos sus autovalores distintos y es igual a PDP^{-1} con $D = \mathrm{diag}(0, 2, -2)$. Luego $B = q(A) = Pq(D)P^{-1}$ y el determinante de B es igual a $\det\big(q(D)\big) = q(0)q(2)q(-2) = (-4)(2^4 - 4)\big((-2)^4 - 4\big) = -576$.

(d) Por la propiedad fundamental de la traza ($\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$), la traza de B es igual a la traza de $q(D)$, luego

$$\mathrm{Tr}B = \mathrm{Tr}\big(q(D)\big) = q(0) + q(2) + q(-2) = (-4) + (2^4 - 4) + \big((-2)^4 - 4\big) = 20.$$