

Nombre y apellidos: _____ **S O L U C I O N E S** _____ DNI: _____**evc5 - Repetición**

14 de diciembre de 2013 , 10:00h

no escribir en esta caja

nota sobre 12

En todas las preguntas de este examen, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ son tres vectores ortogonales de $\mathbf{R}^5$ con normas:

$$\|\mathbf{a}_1\| = 1, \quad \|\mathbf{a}_2\| = 2, \quad \|\mathbf{a}_3\| = 3.$$

Además, $A = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3]$ es la matriz cuyas columnas son $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ y $\mathbf{b}$ es el vector $\mathbf{b} = 2\mathbf{a}_1 - 3\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3$.

Pregunta 1

(3 pt.)

- (0.5 pt.) (a) Escribe la matriz $C = A^T A$.
- (0.5 pt.) (b) ¿Cuáles son los autovalores de $B = AA^T$ y sus multiplicidades geométricas?
- (0.5 pt.) (c) Escribe la matriz Σ_A de la descomposición en valores singulares, $A = U \cdot \Sigma_A \cdot V^T$, de A .
- (1.5 pt.) (d) Explica razonadamente si se puede afirmar sin más datos si el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es consistente o no y si se puede conocer su solución exacta o en el sentido de los mínimos cuadrados (indicando, en caso afirmativo, la solución y su error).

Solución:

- (a) Calculamos C :

$$C = A^T A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \mathbf{a}_2^T \\ \mathbf{a}_3^T \end{bmatrix} [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3] = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

- (b) Sabemos que los autovalores no nulos de B son los mismos que los de C , que son: 1, 4, 9, todos con multiplicidad algebraica y geométrica 1. Como B es una matriz 5×5 , tiene cinco autovalores, por tanto B tiene, a mayores, dos autovalores nulos más que tienen multiplicidad algebraica 2. Como B es diagonalizable (por ser una matriz real simétrica), las multiplicidades geométricas de todos sus autovalores coinciden con las algebraicas.
- (c) Los valores singulares de A son las raíces cuadradas de los autovalores de $A^T A = C$. La matriz Σ_A es del mismo tamaño que A pero con los valores singulares en orden decreciente en la diagonal y el resto ceros:

$$\Sigma_A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (d) Como $\mathbf{b}$ es una combinación lineal de las columnas de A , una solución exacta está dada por los coeficientes de esa combinación lineal:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La solución es exacta y por tanto el error es cero.

Nombre y apellidos: _____ **S O L U C I O N E S** _____ DNI: _____**Pregunta 2**

(3 pt.)



A la vista de los resultados de la pregunta 1,

- (1 pt.) (a) Halla los valores singulares de A^T escribiéndolos en orden decreciente (como aparecen en la descomposición de valores singulares de A^T).
- (1 pt.) (b) Halla la dimensión del espacio nulo de A^T .
- (1 pt.) (c) Halla, las coordenadas, respecto a la base $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ de $H = \text{Col } A \subset \mathbf{R}^5$, de la proyección ortogonal de $\mathbf{b}$ sobre H .

Solución:

- (a) Los valores singulares de A^T son las raíces cuadradas de los autovalores de $AA^T = B$. Por lo dicho en la pregunta anterior, escritos en orden decreciente son: $\sigma_1 = 3$, $\sigma_2 = 2$, $\sigma_3 = 1$, $\sigma_4 = 0$, $\sigma_5 = 0$.
- (b) El espacio nulo de A^T es el mismo que el de $AA^T = B$ y éste es el espacio propio del autovalor cero, que, por la pregunta anterior tiene multiplicidad geométrica 2. Por tanto, $\dim(\text{Nul } A^T) = 2$.
- (c) Como $\mathbf{b}$ pertenece a H su proyección sobre H es él mismo: $\text{proy}_H(\mathbf{b}) = \mathbf{b}$. Sus coordenadas respecto a la base $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ son sus coeficientes: $(2, -3, 1)$.

Nombre y apellidos: _____ **S O L U C I O N E S** _____ DNI: _____**Pregunta 3**

(4 pt.)



- (1.5 pt.) (a) Halla la matriz V de la descomposición en valores singulares, $A = U \cdot \Sigma_A \cdot V^T$, de A (atención: V no es una identidad, aunque se le parece).
- (2.5 pt.) (b) Usa el resultado anterior para expresar, en función de los vectores $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, la aproximación de rango 2 de A .

Solución:

- (a) La matriz V de una descomposición en valores singulares de A , $A = U \Sigma_A V^T$ es la matriz V de una diagonalización ortogonal de $A^T A = C$ de la forma:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} V^T$$

Como C ya está en forma diagonal, los autovectores son las columnas de la matriz identidad I_3 , pero claramente la matriz identidad no sirve como V . La matriz V es la que al multiplicarla por la izquierda intercambia las filas 1 y 3 y al multiplicarla por la derecha intercambia las columnas 1 y 3. Por tanto V es la matriz de intercambio:

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (b) La aproximación de rango 2 de A está dada por:

$$A_2 = A \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^T + A \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_2^T = \mathbf{a}_3 \mathbf{v}_1^T + \mathbf{a}_2 \mathbf{v}_2^T = \mathbf{a}_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \mathbf{a}_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = [\mathbf{0} \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a}_3]$$

Es decir, la matriz igual a A pero con la primera columna toda de ceros.

Nombre y apellidos: _____ **S O L U C I O N E S** _____ DNI: _____**Pregunta 4**

(2 pt.)

Sabemos que $B = AA^T$ es una matriz cuadrada simétrica.

- (1 pt.) (a) Razona cuáles deben ser los autovalores de B y usa la conclusión para escribir el polinomio característico de B (atención al signo de los binomios).
- (1 pt.) (b) Clasifica las formas cuadráticas q_B y q_C definidas por

$$q_B(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T B \mathbf{x} \quad \text{y} \quad q_C(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T C \mathbf{x}$$

Solución:

- (a) Esto ya está contestado en la pregunta 1. Los autovalores de B son 1, 4, 9 (con multiplicidad 1) y 0 (con multiplicidad 2). Por tanto el polinomio característico de B es:

$$p(x) = x^2(1-x)(4-x)(9-x).$$

- (b) q_B es semidefinida positiva (degenerada) y q_C es definida positiva.