evc5 - Repetición

14 de diciembre de 2013, 10:00h

En todas las preguntas de este examen, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ son tres vectores ortogonales de $\mathbf{R}^5$ con normas:

$$\|\mathbf{a}_1\| = 1, \quad \|\mathbf{a}_2\| = 2, \quad \|\mathbf{a}_3\| = 3.$$

Además, $A = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3]$ es la matriz cuyas columnas son $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ y $\mathbf{b}$ es el vector $\mathbf{b} = 2\mathbf{a}_1 - 3\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3$.

(3 pt.) **1.**

- (0.5 pt.) (a) Escribe la matriz $C = A^{\mathrm{T}}A$.
- (0.5 pt.) (b) ¿Cuáles son los autovalores de $B = AA^{\mathrm{T}}$ y sus multiplicidades geométricas?.
- (0.5 pt.) (c) Escribe la matriz Σ_A de la descomposición en valores singulares, $A = U \cdot \Sigma_A \cdot V^{\mathrm{T}}$, de A.
- (1.5 pt.) (d) Explica razonadamente si se puede afirmar sin más datos si el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es consistente o no y si se puede conocer su solución exacta o en el sentido de los mínimos cuadrados (indicando, en caso afirmativo, la solución y su error).

(3 pt.) **2.** A la vista de los resultados de la pregunta 1,

- (1 pt.) (a) Halla los valores singulares de A^{T} escribiéndolos en orden decreciente (como aparecen en la descomposición de valores singulares de A^{T}).
- (1 pt.) (b) Halla la dimensión del espacio nulo de A^{T}.
- (1 pt.) (c) Halla, las coordenadas, respecto a la base $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ de $H = \operatorname{Col} A \subset \mathbf{R}^5$, de la proyección ortogonal de $\mathbf{b}$ sobre H.

(4 pt.) **3.**

- (1.5 pt.) (a) Halla la matriz V de la descomposición en valores singulares, $A = U \cdot \Sigma_A \cdot V^{\mathrm{T}}$, de A (atención: V no es una identidad, aunque se le parece).
- (2.5 pt.) (b) Usa el resultado anterior para expresar, en función de los vectores $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, la aproximación de rango 2 de A.

(2 pt.) **4.** Sabemos que $B = AA^{\mathrm{T}}$ es una matriz cuadrada simétrica.

- (1 pt.) (a) Razona cuáles deben ser los autovalores de B y usa la conclusión para escribir el polinomio característico de B (atención al signo de los binomios).
- (1 pt.) (b) Clasifica las formas cuadráticas q_B y q_C definidas por

$$q_B(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}B\mathbf{x} \qquad \text{y} \qquad q_C(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}C\mathbf{x}$$
