Nombre y apellidos: ________ S O L U C I O N E S ________ DNI: ____________

no escribir en esta caja

nota sobre **12**

evc5 - Repetición

13 de diciembre de 2013, 17:00h

Sean $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ tres vectores ortogonales de $\mathbf{R}^5$ que tienen normas:

$$\|\mathbf{a}_1\| = 3, \quad \|\mathbf{a}_2\| = \|\mathbf{a}_3\| = 2.$$

Sea A la matriz cuyas columnas son $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ y sea $\mathbf{b}$ el vector $\mathbf{b} = 3\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3$.

Pregunta 1

(3 pt.)

(0.5 pt.) (a) Escribe la matriz $C = A^{\mathrm{T}}A$.

(0.5 pt.) (b) ¿Cuáles son los autovalores de AA^{T} y sus multiplicidades geométricas?.

(0.5 pt.) (c) Escribe la matriz Σ_A de la descomposición en valores singulares, $A = U \cdot \Sigma_A \cdot V^{\mathrm{T}}$, de A.

(1.5 pt.) (d) Explica razonadamente si se puede afirmar sin más datos si el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es consistente o no y si se puede conocer su solución exacta o en el sentido de los mínimos cuadrados (indicando, en caso afirmativo, la solución y su error).

Solución:

(a) Calculamos C:

$$C = A^{\mathrm{T}}A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{a}_2^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{a}_3^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a}_3] = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_2\cdot\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2\cdot\mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_2\cdot\mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_3\cdot\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_3\cdot\mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3\cdot\mathbf{a}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

(b) Sabemos que los autovalores no nulos de AA^{T} son los mismos que los de $A^{\mathrm{T}}A = C$, pero como AA^{T} es una matriz 5×5, tiene cinco autovalores, por tanto AA^{T} tiene, a mayores, dos autovalores nulos más. Como AA^{T} es diagonalizable (por ser una matriz real simétrica), las multiplicidades geométricas de todos sus autovalores coinciden con las algebraicas:

	m.a.	m.g.
$\lambda_1 = 9$	1	1
$\lambda_2 = 4$	2	2
$\lambda_3 = 0$	2	2

(c) Los valores singulares de A son las raíces cuadradas de los autovalores de $A^{\mathrm{T}}A = C$: $\sigma_1 = \sqrt{9} = 3$, $\sigma_2 = \sqrt{4} = 2$, $\sigma_3 = \sqrt{4} = 2$. La matriz Σ_A es del mismo tamaño que A pero con los valores singulares en orden decreciente en la diagonal y el resto ceros:

$$\Sigma_A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(d) Como $\mathbf{b}$ es una combinación lineal de las columnas de A, una solución exacta está dada por los coeficientes de esa combinación lineal:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La solución es exacta y por tanto el error es cero.

Nombre y apellidos: ______________ **S O L U C I O N E S** ______________ DNI: ______________

Pregunta 2

(3 pt.)

A la vista de los resultados de la pregunta 1,

(1 pt.) (a) Calcula los cinco valores singulares de A^{T}.

(1 pt.) (b) Halla la dimensión del espacio nulo de A^{T}.

(1 pt.) (c) Halla la proyección ortogonal de $\mathbf{b}$ sobre $\operatorname{Col} A$.

Solución:

(a) Los valores singulares de A^{T} son las raíces cuadradas de los autovalores de $AA^{\mathrm{T}} = B$. Por lo dicho en la pregunta anterior, escritos en orden decreciente son: $\sigma_1 = 3$, $\sigma_2 = 2$, $\sigma_3 = 2$, $\sigma_4 = 0$, $\sigma_5 = 0$.

(b) El espacio nulo de A^{T} es el mismo que el de $AA^{\mathrm{T}} = B$ y éste es el espacio propio del autovalor cero, que, por la pregunta anterior tiene multiplicidad geométrica 2. Por tanto, $\dim\left(\operatorname{Nul} A^{\mathrm{T}}\right) = 2$.

(c) Como $\mathbf{b}$ pertenece a $\operatorname{Col} A$ su proyección sobre $\operatorname{Col} A$ es él mismo: $\operatorname{proy}_{\operatorname{Col} A}(\mathbf{b}) = \mathbf{b} = 3\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3$.

Nombre y apellidos: ______________ **S O L U C I O N E S** ______________ DNI: ______________

Pregunta 3

(4 pt.)

(2 pt.) (a) Halla la matriz V de una descomposición en valores singulares de A, $A = U \cdot \Sigma_A \cdot V^{\mathrm{T}}$.

(2 pt.) (b) Usa el resultado anterior para calcular la aproximación de rango 1 de A.

Solución:

(a) La matriz V de una descomposición en valores singulares de A, $A = U\Sigma_A V^{\mathrm{T}}$ es la matriz V de una diagonalización ortogonal de $A^{\mathrm{T}}A = C$ de la forma:

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} V^{\mathrm{T}}$$

Evidentemente, esto lo cumple la matriz identidad I_3, luego:

$$V = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Otra respuesta válida es:

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) La aproximación de rango 1 de A es:

$$A_2 = A\mathbf{v}_1\mathbf{v}_1^{\mathrm{T}} = \mathbf{a}_1\mathbf{v}_1^{\mathrm{T}} = \mathbf{a}_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = [\mathbf{a}_1 \;\; \mathbf{0} \;\; \mathbf{0}]$$

Es decir, la matriz 5×3 cuya primera columna es igual a la primera de A y todos los demás elementos cero.

Nombre y apellidos: ______________ **S O L U C I O N E S** ______________ DNI: ______________

Pregunta 4

(2 pt.)

Sabemos que $B = AA^{\mathrm{T}}$ es una matriz cuadrada simétrica.

(0.5 pt.) (a) ¿Cuántas filas y columnas tiene B?.

(0.5 pt.) (b) Escribe el polinomio característico de B.

(1 pt.) (c) Clasifica las formas cuadráticas q_B y q_C definidas por

$$q_B(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{\mathrm{T}} B \mathbf{x} \qquad \text{y} \qquad q_C(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{\mathrm{T}} C \mathbf{x}$$

Solución:

(a) B es el producto de una matriz 5×3 por una matriz 3×5, por tanto es 5×5; o sea, tiene 5 filas y 5 columnas.

(b) Esto ya está contestado en la pregunta 1. Los autovalores de B son 9 con multiplicidad 1 y 4 y 0 con multiplicidad 2 cada uno. Por tanto el polinomio característico de B es:

$$p(x) = x^2(4-x)^2(9-x).$$

(c) q_B es semidefinida positiva porque todos sus autovalores son no negativos (y degenerada porque cero es autovalor de B) y q_C es definida positiva porque todos sus autovalores son positivos.