Nombre y apellidos: _________ **S O L U C I O N E S** _________ DNI: ____________

no escribir en esta caja

nota sobre **12**

Evaluación continua 5

11 de diciembre de 2013, 11:00h

Este examen consta de cuatro preguntas con varios apartados cada una. Escribe la respuesta de cada pregunta en la misma hoja en la que se halla la pregunta. Cada grupo entregará al completar sus respuestas la hoja de control de asistencia seguida de las hojas de las preguntas. El tiempo disponible para la realización del examen es de 45 minutos.

Todas las preguntas se refieren a los siguientes datos:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$B = A^{\mathrm{T}}A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = AA^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$q_B : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$ es la forma cuadrática definida por B, es decir, la función definida por:

$$q_B(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{\mathrm{T}} B\, \mathbf{x}.$$

Nombre y apellidos: ______________ **S O L U C I O N E S** ______________ DNI: ______________

Pregunta 1

(3 pt.)

Contesta razonadamente:

(0.5 pt.) (a) ¿Qué relación hay entre los valores singulares de A y los de A^{T}?

(0.5 pt.) (b) ¿Cuáles son los valores propios de C y sus multiplicidades geométricas?.

(0.5 pt.) (c) Escribe la matriz $\Sigma_{A^{\mathrm{T}}}$ de una descomposición en valores singulares, $A^{\mathrm{T}} = \tilde{U} \cdot \Sigma_{A^{\mathrm{T}}} \cdot \tilde{V}^{\mathrm{T}}$, de A^{T}.

(1.5 pt.) (d) Comprueba que el sistema $A^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es inconsistente y halla su solución en el sentido de los mínimos cuadrados.

Solución:

(a) A y A^{T} tienen los mismos valores singulares no nulos.

(b) Calculamos C:

$$C = AA^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Como es diagonal, sus valores propios son los de la diagonal: 9 con multiplicidad algebraica y geométrica 3.

(c) Los valores singulares de A^{T} son 3, 3, 3. La matriz $\Sigma_{A^{\mathrm{T}}}$ es del mismo tamaño que A^{T} pero con los valores singulares:

$$\Sigma_{A^{\mathrm{T}}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(d) Como las columnas de A^{T} son ortogonales dos a dos, lo más fácil es calcular la proyección ortogonal de $\mathbf{b}$ sobre $\operatorname{Col} A^{\mathrm{T}}$. si llamamos $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ a las columnas de A^{T},

$$\mathbf{b}_{\parallel} = \operatorname{proy}_{\operatorname{Col} A^{\mathrm{T}}}(\mathbf{b}) = \frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}_1}{\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_1}\mathbf{a}_1 + \frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}_2}{\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{a}_2}\mathbf{a}_2 + \frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}_3}{\mathbf{a}_3\cdot\mathbf{a}_3}\mathbf{a}_3 = -\tfrac{5}{3}\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \tfrac{7}{3}\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 4/3 \\ -1/3 \\ 9 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

Como esta proyección no es igual a $\mathbf{b}$, el sistema era inconsistente. Además la solución de mínimos cuadrados es el vector de coeficientes:

$$\left(\frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}_1}{\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_1}, \frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}_2}{\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{a}_2}, \frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}_3}{\mathbf{a}_3\cdot\mathbf{a}_3} \right) = \left(-\tfrac{5}{3}, 1, \tfrac{7}{3} \right)$$

Nombre y apellidos: ______________ S O L U C I O N E S ______________ DNI: ______________

Pregunta 2

(3 pt.)

A la vista de los resultados de la pregunta 1,

(1 pt.) (a) Calcula los valores singulares de A.

(1 pt.) (b) Halla una base del espacio nulo de A.

(1 pt.) (c) Calcula la proyección ortogonal de $\mathbf{b}$ sobre $\operatorname{Col} A^{\mathsf{T}}$.

Solución:

(a) Por el apartado (b) de la pregunta 1, los valores singulares no nulos son $\sqrt{9} = 3, \sqrt{9} = 3, \sqrt{9} = 3$. A mayores, tiene un valor singular más porque A tiene cuatro columnas, luego el cuarto valor singular es cero.

(b) Basta resolver el sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ y escribir la solución en forma vectorial paramétrica. Los vectores obtenidos son la base. Operando:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{o también, multiplicando por } -2\text{:} \quad \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$$

(c) La proyección ortogonal de $\mathbf{b}$ sobre $\operatorname{Col} A^{\mathsf{T}}$ se hizo en el problema anterior:

$$\operatorname{proy}_{\operatorname{Col} A^{\mathsf{T}}}(\mathbf{b}) = \frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}_1}{\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_1}\mathbf{a}_1 + \frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}_2}{\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{a}_2}\mathbf{a}_2 + \frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}_3}{\mathbf{a}_3\cdot\mathbf{a}_3}\mathbf{a}_3 = -\tfrac{5}{3}\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \tfrac{7}{3}\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 4/3 \\ -1/3 \\ 9 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

Nombre y apellidos: ______________ **S O L U C I O N E S** ______________ DNI: ______________

Pregunta 3

(4 pt.)

(3 pt.) (a) Halla la matriz V de una descomposición en valores singulares de A, $A = U\Sigma_A V^{\mathsf{T}}$.

(1 pt.) (b) Usa el resultado anterior para calcular una aproximación de rango 1 de A.

Solución:

(a) La matriz V de una descomposición en valores singulares de A, $A = U\Sigma_A V^{\mathsf{T}}$ es la matriz V de una diagonalización ortogonal de $A^{\mathsf{T}}A = B$. Como ya sabemos que los autovalores son 9 y 0, buscamos los autovectores.

De $\boxed{\lambda_1 = 9}$:

$$B - 9I = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & 2 \\ -2 & -4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{base:} \quad \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Como el segundo es ortogonal a los otros dos, para ortogonalizar basta cambiar el primer vector por su componente transversal respecto al tercero. Como los podemos ordenar como queramos, podemos poner: $\mathbf{v}_1 = \mathbf{b}_2$ y $\mathbf{v}_2 = \frac{\mathbf{b}_3}{\|\mathbf{b}_3\|}$. Para hallar $\mathbf{v}_3$, primero calculo la componente transversal:

$$\mathbf{b}_1 - \frac{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_3}{\mathbf{b}_3 \cdot \mathbf{b}_3}\mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{(-4)}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} \\ 1 \\ 0 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} \quad \text{y multiplicando por 5:} \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Normalizando, tenemos:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{45}} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Los autovectores de $\boxed{\lambda_2 = 0}$ forman una base del espacio nulo de B. Pero como $B = A^{\mathsf{T}}A$, el espacio nulo de B es el mismo que el espacio nulo de A, que ya fué hallado en la pregunta anterior, luego normalizando aquél vector:

$$\mathbf{v}_4 = \frac{1}{\sqrt{9}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad \text{y finalmente:} \quad V = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{45}} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{5}{\sqrt{45}} & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{\sqrt{45}} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

(b) Una de la varias posibles aproximaciones de rango 1 de A está dada por:

$$A_1 = A\mathbf{v}_1\mathbf{v}_1^{\mathsf{T}} = A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nombre y apellidos: ______________ S O L U C I O N E S ______________ DNI: ______________

Pregunta 4

(2 pt.)

Contesta razonadamente:

(1 pt.) (a) ¿Es q_B una forma cuadrática definida? ¿Es indefinida? ¿Por qué?.

(0.5 pt.) (b) ¿Es q_B semidefinida? ¿Por qué?.

(0.5 pt.) (c) ¿Es q_B degenerada? ¿Por qué?.

Solución:

Como sabemos (por el apartado (a) de la pregunta 2) que los autovalores de B (los cuadrados de los valores singulares de A) son 9 (con multiplicidad 3) y 0, podemos decir sin más cálculos:

(a) No es definida porque los autovalores de su matriz B no son todos positivos ni todos negativos. Tampoco es indefinida porque su matriz no tiene autovalores de ambos signos, positivos y negativos.

(b) Sí es semidefinida porque su matriz carece de autovalores de un signo (en este caso del negativo).

(c) Sí es degenerada porque cero es autovalor de su matriz B.