Nombre y apellidos: ________ **S O L U C I O N E S** ________ DNI: ____________

no escribir en esta caja

Ex. Final 1ª Convoc.

13 de enero de 2014, 10:00h

nota sobre **10**

Pregunta 1

(2.5 pt.)

(0.5 pt.) (a) Resuelve la ecuación $x^2 - 4x + 16 = 0$ y calcula el módulo de las soluciones.

(0.7 pt.) (b) Sea z aquella solución de la ecuación del apartado anterior que tiene parte imaginaria positiva. Calcula las dos raices cuadradas de z.

(1 pt.) (c) Considera el sistema de ecuaciones lineales $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -a \\ -a & 1 & a \\ -1 & 2a & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ a+2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Halla la solución general del sistema anterior en el caso $a = 2$.

(0.3 pt.) (d) ¿Existe solución en el caso $a = 0$?. En caso afirmativo calcúlala.

Solución:

(a) $x = 2 \pm 2\sqrt{3}i$, $|x| = \sqrt{2^2 + 2^2 \times 3} = 4$.

(b) $z = 2 + 2\sqrt{3}i = 4\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 4\,e^{i\pi/6}$. Las dos raíces cuadradas de z son $\boxed{\pm 2\,e^{i\pi/12}}$.

(c) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} \\ \frac{8}{7} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}.$

(d) Para $a = 0$ no existe solución.

Nombre y apellidos: ______________ **S O L U C I O N E S** ______________ DNI: ______________

Pregunta 2

(2.5 pt.)

Sea

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 & 1 \\ -4 & 0 & -3 & 0 \\ -2 & 3 & -5 & 3 \\ -2 & 1 & -6 & -1 \end{pmatrix}.$$

(0.5 pt.) (a) Calcula el determinante de A.

(0.5 pt.) (b) Halla una base del núcleo y una de la imagen de la aplicación lineal definida por A (es decir, halla bases de los espacios nulo y columna de A).

(1.5 pt.) (c) Halla la factorización LU de A.

Solución:

(a) $\det A = 16$.

(b) Como el determinante de A es distinto de cero, el espacio nulo es el vector cero y el espacio columna es $\mathbf{R}^4$. La base del espacio nulo es el conjunto vacío y una base del espacio columna es la base canónica de $\mathbf{R}^4$ o, también, la formada por las columnas de A.

(c) Restamos a la fila 2 el doble de la 1, después restamos a las filas 3 y 4 la primera, sumamos a la fila 3 la fila 2 y luego restamos a la fila 4 el doble de la fila 3. Con estas operaciones A se transforma en la matriz escalonada

$$U = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nombre y apellidos: ______________ **S O L U C I O N E S** ______________ DNI: ______________

Pregunta 3

(2.5 pt.)

Sea A una matriz de rango 3 cuyo polinomio característico es $p_A(x) = x^3(2+x)(1-x)$.

(1 pt.) (a) Halla los autovalores de A así como la multiplicidad algebraica y geométrica de cada uno de ellos. ¿Es A diagonalizable?.

(0.75 pt.) (b) Calcula el determinante de la matriz $H = q(A)$ donde q es el polinomio $q(x) = 2 + x$.

(0.75 pt.) (c) Usa el teorema de Cayley-Hamilton para hallar una matriz B tal que $A^5 = B(A - 2I)$.

Solución:

(a) A es una matriz 5×5 porque el grado de p_A es 5. La única duda está con la multiplicidad geométrica del autovalor cero. $\text{m.g.}(0) = \dim \operatorname{Nul} A = 5 - \text{rango}(A) = 2$. Luego:

	m.a.	m.g.
$\lambda_1 = 0$	3	2
$\lambda_2 = 1$	1	1
$\lambda_3 = -2$	1	1

(b) $H = 2I + A$. Como -2 es un autovalor de A, $\det H = 0$.

(c) Si se expande $p_A(x)$ se obtiene $2x^3 - x^4 - x^5$. Por Cayley-Hamilton $2A^3 - A^4 - A^5 = 0$, de donde $A^5 = 2A^3 - A^4 = A^3(2I - A)$. Luego $B = -A^3$.

Nombre y apellidos: ______________ S O L U C I O N E S ______________ DNI: ______________

Pregunta 4

(2.5 pt.)

Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(0.5 pt.) (a) Demuestra que el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es inconsistente.

(1 pt.) (b) Calcula la proyección ortogonal de $\mathbf{b}$ sobre el espacio generado por las columnas de A.

(1 pt.) (c) Halla la solución por mínimos cuadrados del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Solución:

(a) Basta demostrar que la matriz ampliada del sistema tiene rango 4. Restando la fila 1 a las filas 3 y 4, la matriz ampliada se transforma en

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \det(A') = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 1.$$

Luego la matriz ampliada tiene rango 4, que es mayor que el de la matriz de coeficientes y por tanto el sistema es insonsistente.

(b) Las columnas de A no son ortogonales, por tanto no podemos usar la fórmula simplificada de la proyección ortogonal. Podemos aplicar el proceso de Gram-Schmidt, pero en este caso es muy sencillo ortogonalizar con dos operaciones elementales de columnas:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3+C_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_2-C_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora: $\operatorname{proy}_{\operatorname{Col} A}(\mathbf{b}) = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{6} \\ -1 \\ \frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$. Otra forma de hallar esto es resolver primero el sistema $A^{\mathsf{T}}A\mathbf{x} = A^{\mathsf{T}}\mathbf{b}$, (apartado (c)) y la proyección ortogonal es $\operatorname{proy}_{\operatorname{Col} A}(\mathbf{b}) = A\mathbf{x}$.

(c) Calculamos $A^{\mathsf{T}}A$ y $A^{\mathsf{T}}\mathbf{b}$ y resolvemos el sistema $A^{\mathsf{T}}A\mathbf{x} = A^{\mathsf{T}}\mathbf{b}$.

$$A^{\mathsf{T}}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^{\mathsf{T}}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Resolviendo el sistema $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ se obtiene: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$.