Ex. Final 1ª Convoc.

13 de enero de 2014, 10:00h

(2.5 pt.) **1.**

(0.5 pt.) (a) Resuelve la ecuación $x^2 - 4x + 16 = 0$ y calcula el módulo de las soluciones.

(0.7 pt.) (b) Sea z aquella solución de la ecuación del apartado anterior que tiene parte imaginaria positiva. Calcula las dos raices cuadradas de z.

(1 pt.) (c) Considera el sistema de ecuaciones lineales $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -a \\ -a & 1 & a \\ -1 & 2a & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ a+2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Halla la solución general del sistema anterior en el caso $a = 2$.

(0.3 pt.) (d) ¿Existe solución en el caso $a = 0$?. En caso afirmativo calcúlala.

(2.5 pt.) **2.** Sea

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 & 1 \\ -4 & 0 & -3 & 0 \\ -2 & 3 & -5 & 3 \\ -2 & 1 & -6 & -1 \end{pmatrix}.$$

(0.5 pt.) (a) Calcula el determinante de A.

(0.5 pt.) (b) Halla una base del núcleo y una de la imagen de la aplicación lineal definida por A (es decir, halla bases de los espacios nulo y columna de A).

(1.5 pt.) (c) Halla la factorización LU de A.

(2.5 pt.) **3.** Sea A una matriz de rango 3 cuyo polinomio característico es $p_A(x) = x^3(2 + x)(1 - x)$.

(1 pt.) (a) Halla los autovalores de A así como la multiplicidad algebraica y geométrica de cada uno de ellos. ¿Es A diagonalizable?.

(0.75 pt.) (b) Calcula el determinante de la matriz $H = q(A)$ donde q es el polinomio $q(x) = 2 + x$.

(0.75 pt.) (c) Usa el teorema de Cayley-Hamilton para hallar una matriz B tal que $A^5 = B(A - 2I)$.

(2.5 pt.) **4.** Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(0.5 pt.) (a) Demuestra que el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es inconsistente.

(1 pt.) (b) Calcula la proyección ortogonal de $\mathbf{b}$ sobre el espacio generado por las columnas de A.

(1 pt.) (c) Halla la solución por mínimos cuadrados del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
