Álgebra lineal
Evaluación continua
Grupo B
7 de Noviembre de 2014

1. Cada una de las siguientes matrices

$$(A_1|b_1) = \begin{pmatrix} * & & & & * \\ * & * & & & * \\ * & * & * & & * \\ * & * & * & * & * \end{pmatrix}, \quad (A_2|b_2) = \begin{pmatrix} & & * & & * \\ * & & & * & * \\ * & & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{pmatrix},$$

$$(A_3|b_3) = \begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ & & * & * & \\ & & * & * & * \\ & * & * & * & * \end{pmatrix}, \quad (A_4|b_4) = \begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ & & * & * & * \\ & & * & * & * \\ & * & * & * & * \end{pmatrix},$$

$$(A_5|b_5) = \begin{pmatrix} * & & * & * & * \\ & & & * & * \\ & & & & \\ & * & * & * & * \end{pmatrix}, \quad (A_6|b_6) = \begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ & & & & * \\ & * & * & * & * \\ & & & * & * \end{pmatrix},$$

donde los asteriscos indican que el coeficiente que subyace es distinto de cero y donde los espacios en blanco son cero, es la matriz ampliada de un SEL de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas. Se pide decir, justificando las respuestas, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

1) El SEL $A_1x = b_1$ es compatible determinado.
2) El SEL $A_2x = b_2$ es compatible determinado.
3) El SEL $A_3x = b_3$ es compatible indeterminado.
4) El SEL $A_4x = b_4$ no puede ser incompatible.
5) El SEL $A_5x = b_5$ es compatible indeterminado.
6) El SEL $A_6x = b_6$ es compatible.

NOTA: si la afirmación es verdadera se pide una justificación; si la afirmación es falsa se pide un contraejemplo.

2. Sean m, $n \in \mathbb{N}$, $3 \leq m \leq n$. Se considera la matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ dada por

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & \dots & \mp 1 & \pm 1 & \mp 1 & \pm 1 & \mp 1 & \dots & \pm 1 & \mp 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & \dots & \pm 1 & \mp 1 & \pm 1 & \mp 1 & \pm 1 & \dots & \mp 1 & \pm 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & \dots & \mp 1 & \pm 1 & \mp 1 & \pm 1 & \mp 1 & \dots & \pm 1 & \mp 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & \dots & \pm 1 & \mp 1 & \pm 1 & \mp 1 & \pm 1 & \dots & \mp 1 & \pm 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & \dots & \mp 1 & \pm 1 & \mp 1 & \pm 1 & \mp 1 & \dots & \pm 1 & \mp 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \pm 1 & \mp 1 & \pm 1 & \mp 1 & \pm 1 & \dots & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & \dots & \mp 1 & \pm 1 \\ \mp 1 & \pm 1 & \mp 1 & \pm 1 & \mp 1 & \dots & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & \dots & \pm 1 & \mp 1 \end{pmatrix},$$

donde el coeficiente $(1, m)$ es -1 o 1 dependiendo de si m es par o impar, el coeficiente $(m, 1)$ es 1 o -1 dependiendo de si m es par o impar, el último coeficiente de la primera fila es -1 o 1 dependiendo de si n es par o impar, y donde el último coeficiente de la última fila es -1 si m y n tienen la misma paridad y 1 en caso contrario.

a) Para $m = n$, calcular $\det(A)$.

b) Deducir del apartado anterior el rango de A.

c) Para $m = 3$ y $n = 5$, se pide:

c1) Dar la dimensión y una base de $\mathrm{Im}(A)$ y de $\ker(A)$.

c2) Resolver el SEL $Ax = b$ siendo $b = (1\ 1\ 1)^t$.

c3) Sea U el subespacio de $\mathbb{R}^5$ definido por las ecuaciones $2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$ y $-x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - 2x_5 = 0$. Dar la dimensión y una base de U, de $U \cap \ker(A)$ y de $U + \ker(A)$

d) Para $m = n = 4$, se pide:

d1) Calcular, si existe, la factorización LU de A.

d2) Calcular, si existe, la inversa de A.