

1. Se considera la matriz real

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Calcular la factorización LU de la matriz A .
(b) Utilizar el apartado anterior para resolver el sistema de ecuaciones lineales

$$Ax = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- (c) ¿Es $A^2 = L^2U^2$? Razonar la respuesta.
(d) Calcular el determinante de A^k para todo $k \in \mathbb{N}$
(e) Calcular, si es posible, la inversa de la matriz A utilizando operaciones elementales.
2. En los espacios vectoriales $\mathbb{R}^4$, $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ y $\Pi_2(\mathbb{R})$ sobre $\mathbb{R}$ estudiar cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios vectoriales y, para aquellos que lo sean, dar una base.

- (a) $B = \{(x, y, z, t) / x - 2z = t\}$
(b) $U = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / \text{tr}(A) = b = 1 \right\}$
(c) $D = \{p(x) / p(x) = p(-x)\}$

3. Sean

- a) $f : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \Pi_2(\mathbb{R})$ definida por $f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ax^2 + (b + c)x + d + 1$
b) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Demostrar si son aplicaciones lineales, y en caso de que lo sean

- (i) Determinar el núcleo de f .
(ii) Calcular la imagen de f .