

Nombre y apellidos: _____ **S O L U C I O N E S** _____ DNI: _____**Ex. Final conv. 1**

18 de mayo de 2015, 16:00h – Aula B003

Pregunta 1

(2 pt.)

Dado el sistema de ecuaciones lineales con coeficientes complejos que aparece en el recuadro y dados los vectores de $\mathbf{C}^3$, $\mathbf{v} = (-2i, -\frac{1}{2} + \frac{3i}{2}, \frac{3}{2} + \frac{3i}{2})$ y $\mathbf{w} = (-i, -1 + 3i, 3 + 3i)$, se pide:

(0.5 pt.) (a) Halla una forma escalonada de la matriz ampliada del sistema.

(0.5 pt.) (b) Halla la solución general del sistema.

(1 pt.) (c) Halla las raíces cuartas del producto hermítico $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \mathbf{w}^* \mathbf{v}$.

$$\begin{aligned} x - iy + iz &= 0 \\ y - (e^{\frac{\pi}{2}i})z &= 1 \\ ix - y + iz &= 1 \end{aligned}$$

Solución:

(a)

$$\begin{pmatrix} 1 & -i & i & 0 \\ 0 & 1 & -i & 1 \\ i & -1 & i & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - iF_1} \begin{pmatrix} 1 & -i & i & 0 \\ 0 & 1 & -i & 1 \\ 0 & -2 & 1+i & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 + 2F_2} \begin{pmatrix} 1 & -i & i & 0 \\ 0 & 1 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 1-i & 3 \end{pmatrix}.$$

(b) Puesto que la columna de términos independientes no tiene pivote, el sistema es compatible. Puesto que todas las columnas de coeficientes tienen pivote, el sistema tiene solución única.

Por la última fila de la forma escalonada: $z = \frac{3}{1-i} = \frac{3}{2}(1+i)$. Por la segunda ecuación del sistema $y = 1 + zi = 1 + \frac{3}{2}(i-1) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$ y por la primera ecuación $x = (y-z)i = (-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i - \frac{3}{2} - \frac{3}{2}i)i = -2i$, así que la solución es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2i \\ -\frac{1}{2}(1-3i) \\ \frac{3}{2}(1+i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2i \\ -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i \\ \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i \end{pmatrix}.$$

$$(c) \mathbf{w}^* \mathbf{v} = \begin{pmatrix} i & -1-3i & 3-3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2i \\ -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i \\ \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i \end{pmatrix} = 2 + \frac{1}{2}|-1+3i|^2 + \frac{9}{2}|1+i|^2 = 16.$$

Las raíces cuartas de 16 son el doble de las raíces cuartas de la unidad: $\boxed{\pm 2}$ y $\boxed{\pm 2i}$.

Nombre y apellidos: _____ **S O L U C I O N E S** _____ DNI: _____**Pregunta 2**

(2 pt.)

Sea la aplicación lineal $f : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^3$ definida por:

$$f(x, y, z, t) = (2x + 4y - 2z + t, -2x - 5y + 7z + 3t, 3x + 7y - 8z + 6t)$$

- (0.5 pt.) (a) Halla una base del espacio imagen de f .
 (0.75 pt.) (b) Halla una base del núcleo de f .
 (0.75 pt.) (c) Halla las ecuaciones paramétricas del conjunto de todos los vectores $\mathbf{x}$ tales que $f(\mathbf{x}) = (3, 1, 9)$.

Solución:

- (a) La matriz de la aplicación lineal f es $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 1 \\ -2 & -5 & 7 & 3 \\ 3 & 7 & -8 & 6 \end{pmatrix}$.

La ponemos en forma escalonada mediante operaciones elementales de filas:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 1 \\ -2 & -5 & 7 & 3 \\ 3 & 7 & -8 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 + F_1} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 4 \\ 3 & 7 & -8 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} F_1 - F_3 \\ F_3 + 3F_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} -1 & -3 & 6 & -5 \\ 0 & -1 & 5 & 4 \\ 0 & -2 & 10 & -9 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{F_3 - 2F_2} \begin{pmatrix} -1 & -3 & 6 & -5 \\ 0 & -1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -17 \end{pmatrix}.$$

Una base de la imagen de f está formada por las columnas pivote de A , que son la 1, la 2 y la 4:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}.$$

- (b) Para hallar una base del núcleo de f resolvemos el sistema homogéneo correspondiente:

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 & 6 & -5 \\ 0 & -1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -17 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 - 3F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -9 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad \text{Luego una base de } \ker f \text{ es: } \left\{ \begin{pmatrix} -9 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

- (c) Como $(3, 1, 9)$ es la suma de la primera y la última columna de A , una solución particular $\mathbf{x}_0$ tal que $f(\mathbf{x}_0) = (3, 1, 9)$ es: $\mathbf{x} = (1, 0, 0, 1)$. Por tanto la solución general es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -9 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{y las ecuaciones paramétricas son: } \begin{cases} x = 1 - 9s \\ y = 5s \\ z = s \\ t = 0. \end{cases}$$

Nombre y apellidos: _____ **S O L U C I O N E S** _____ DNI: _____

Pregunta 3

(1.5 pt.)

Dada la matriz M de la derecha, sea A la matriz formada por las columnas pivote de M y sea B la matriz formada por las filas no nulas de la forma escalonada reducida de M . Calcula A y B , y úsalas para calcular la inversa del producto $A^T M B^T$ (o sea, calcula $(A^T M B^T)^{-1}$).

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & -7 & 6 \end{pmatrix}$$

Solución:

Comenzamos hallando la forma escalonada reducida de A :

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & -7 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 + \frac{1}{2}F_1} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & -4 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 + 2F_2} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{\frac{1}{2}F_1 \\ F_1 + 2F_2}]{\substack{\frac{1}{2}F_1 \\ F_1 + 2F_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego, $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. Ahora hay que calcular el producto $A^T M B^T$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & -7 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 7 & 2 \\ -6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 174 & 48 \\ -144 & -18 \end{pmatrix}.$$

La inversa pedida es:

$$(A^T M B^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 174 & 48 \\ -144 & -18 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-174 \times 18 + 144 \times 48} \begin{pmatrix} -18 & -48 \\ 144 & 174 \end{pmatrix} = \frac{1}{630} \begin{pmatrix} -3 & -8 \\ 24 & 29 \end{pmatrix}$$

Nombre y apellidos: _____ **S O L U C I O N E S** _____ DNI: _____**Pregunta 4**

(1.5 pt.)

Para la matriz A de la derecha, contesta razonadamente:(0.25 pt.) (a) ¿Por qué se puede afirmar que A es diagonalizable?(0.25 pt.) (b) ¿Cuáles son los autovalores de A ?(1 pt.) (c) Halla una *diagonalización ortogonal* de A .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución:

(a) Porque es una matriz simétrica.

(b) Los autovalores que se ven de inmediato son $\lambda_1 = 0$ (porque $\det A = 0$ al tener dos filas iguales), $\lambda_2 = 1$ y $\lambda_3 = 4$. El cuarto debe sumar 9 con los anteriores ya que 9 es la traza de A , luego el cuarto es también 4, igual a λ_3 , que tiene multiplicidad 2.(c) La diagonalización ortogonal será $A = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \mathbf{u}_3 \ \mathbf{u}_4] \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \mathbf{u}_3 \ \mathbf{u}_4]^T$ donde $\mathbf{u}_1$ es unautovector unitario de $\lambda_1 = 0$, $\mathbf{u}_2$ es un autovector unitario de $\lambda_2 = 1$ y $\mathbf{u}_3$ y $\mathbf{u}_4$ son autovectores unitarios y ortogonales de $\lambda_3 = 4$.Hallamos $\mathbf{u}_1$: Ponemos A en forma escalonada reducida:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{de donde: } \mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

Hallamos $\mathbf{u}_2$: Ponemos la matriz característica $A - I$ en forma escalonada reducida:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{de donde: } \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Hallamos $\mathbf{u}_3$ y $\mathbf{u}_4$: Ponemos la matriz característica $A - 4I$ en forma escalonada reducida:

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{de donde: } \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nombre y apellidos: _____ **S O L U C I O N E S** _____ DNI: _____**Pregunta 5**

(1.5 pt.)

Para la matriz A y vector $\mathbf{b}$ de la derecha, contesta razonadamente:(0.5 pt.) (a) ¿Existe algún vector $\mathbf{x}$ tal que $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\| = 0$?(0.5 pt.) (b) Halla $\mathbf{x}$ tal que $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|$ tenga el mínimo valor posible.(0.5 pt.) (c) Halla ese mínimo valor posible de $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

(a) El determinante de la matriz ampliada es $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 1 + 2 \neq 0$,

luego tiene rango 3, que es mayor que el número de columnas de la matriz de coeficientes. Luego el sistema es incompatible.

(b) Resolvemos $A^T A \mathbf{x} = A^T \mathbf{b}$, cuya matriz ampliada es:

$$A^T(A|\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{3}F_2]{\frac{1}{2}F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego el vector $\mathbf{x}$ para el que $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|$ tiene el mínimo valor posible es: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$.

(c) $A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A\mathbf{x} - \mathbf{b} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, luego el el mínimo valor posible es:

$$\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\| = \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4 + 1} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Nombre y apellidos: _____ **S O L U C I O N E S** _____ DNI: _____**Pregunta 6**

(1.5 pt.)

Halla el mayor valor singular, y la aproximación de rango uno de la matriz A de la pregunta anterior.*Solución:*El mayor valor singular de A es la raíz cuadrada del máximo autovalor de

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Luego el máximo valor singular de A es $\sigma_1 = \boxed{\sqrt{3}}$.La aproximación de rango 1 es: $A_1 = A \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^T$, donde $\mathbf{v}_1$ es cualquier autovector unitario de $A^T A$ del autovalor $\lambda_1 = 3$. Por tanto, necesitamos un autovector unitario de este autovalor:

$$\begin{pmatrix} 2-3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad x_1 = 0, \quad \mathbf{x} = x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora calculamos:

$$A_1 = A \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$