Ex. Final conv. 1

18 de mayo de 2015, 16:00h – Aula B003

---

1. Dado el sistema de ecuaciones lineales con coeficientes complejos que aparece en el recuadro y dados los vectores de $\mathbf{C}^3$, $\mathbf{v} = (-2i,\ -\frac{1}{2} + \frac{3i}{2},\ \frac{3}{2} + \frac{3i}{2})$ y $\mathbf{w} = (-i,\ -1+3i,\ 3+3i)$, se pide:

(a) Halla una forma escalonada de la matriz ampliada del sistema.
(b) Halla la solución general del sistema.
(c) Halla las raices cuartas del producto hermítico $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \mathbf{w}^*\mathbf{v}$.

$$\boxed{\begin{aligned} x - iy + iz &= 0 \\ y - \left(e^{\frac{\pi}{2} i}\right) z &= 1 \\ ix - y + iz &= 1 \end{aligned}}$$

---

2. Sea la aplicación lineal $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ definida por:

$$f(x, y, z, t) = (2x + 4y - 2z + t\,,\ -2x - 5y + 7z + 3t\,,\ 3x + 7y - 8z + 6t)$$

(a) Halla una base del espacio imagen de f.
(b) Halla una base del núcleo de f.
(c) Halla las ecuaciones paramétricas del conjunto de todos los vectores $\mathbf{x}$ tales que $f(\mathbf{x}) = (3, 1, 9)$.

---

3. Dada la matriz M de la derecha, sea A la matriz formada por las columnas pivote de M y sea B la matriz formada por las filas no nulas de la forma escalonada reducida de M. Calcula A y B, y úsalas para calcular la inversa del producto $A^{\mathrm{T}}MB^{\mathrm{T}}$ (o sea, calcula $(A^{\mathrm{T}}MB^{\mathrm{T}})^{-1}$).

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & -7 & 6 \end{pmatrix}$$

---

4. Para la matriz A de la derecha, contesta razonadamente:

(a) ¿Por qué se puede afirmar que A es diagonalizable?
(b) ¿Cuáles son los autovalores de A?
(c) Halla una *diagonalización ortogonal* de A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

---

5. Para la matriz A y vector $\mathbf{b}$ de la derecha, contesta razonadamente:

(a) ¿Existe algún vector $\mathbf{x}$ tal que $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\| = 0$?
(b) Halla $\mathbf{x}$ tal que $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|$ tenga el mínimo valor posible.
(c) Halla ese mínimo valor posible de $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

---

6. Halla el mayor valor singular, y la aproximación de rango uno de la matriz A de la pregunta anterior.
