Universida$_{de}$Vigo - EET Algebra Lineal (1º Teleco) Curso 2014/15

Nombre y apellidos: ________ **S O L U C I O N E S** ________ DNI: ____________

no escribir en esta caja

nota sobre **10**

Ex. Final conv. 1

15 de diciembre de 2014, 10:00h – Aula B003

Pregunta 1

(2 pt.)

Sea el sistema de ecuaciones lineales con coeficientes complejos (i es la unidad imaginaria, $i = \sqrt{-1}$):

$$\begin{aligned} ix + y - z &= 0 \\ iy + z &= i \\ ix - y + iz &= 1 \end{aligned}$$

(0.75 pt.) (a) Halla una forma escalonada de la matriz ampliada del sistema.

(0.75 pt.) (b) ¿Es dicho sistema compatible? ¿Tiene solución única?. Resuélvelo expresando las soluciones en forma binómica.

(0.5 pt.) (c) Sean los vectores de $\mathbf{C}^3$, $\mathbf{v} = (-2i, -\frac{1}{2} + \frac{3i}{2}, \frac{3}{2} + \frac{3i}{2})$ y $\mathbf{w} = (-i, -1+3i, 3+3i)$. Calcular el número $\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{w}$ expresándolo en forma exponencial.

Solución:

(a)

$$\begin{pmatrix} i & 1 & -1 & 0 \\ 0 & i & 1 & i \\ i & -1 & i & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - F_1} \begin{pmatrix} i & 1 & -1 & 0 \\ 0 & i & 1 & i \\ 0 & -2 & 1+i & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - 2iF_2} \begin{pmatrix} i & 1 & -1 & 0 \\ 0 & i & 1 & i \\ 0 & 0 & 1-i & 3 \end{pmatrix}.$$

(b) Puesto que la columna de términos independientes no tiene pivote, el sistema es compatible. Puesto que todas las columnas de coeficientes tienen pivote, el sistema tiene solución única.

Por la última fila de la forma escalonada: $z = \frac{3}{1-i} = \frac{3}{2}(1+i)$. Por la segunda ecuación del sistema $y = 1+zi = 1+\frac{3}{2}(i-1) = -\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$ y por la primera ecuación $x = (y-z)i = (-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}i)i = -2i$, así que la solución es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2i \\ -\frac{1}{2}(1-3i) \\ \frac{3}{2}(1+i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2i \\ -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i \\ \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i \end{pmatrix}.$$

(c) $\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -2i & -\frac{1}{2} + \frac{3i}{2} & \frac{3}{2} + \frac{3i}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i \\ -1+3i \\ 3+3i \end{pmatrix} = -2 + \frac{1}{2}(-1+3i)^2 + \frac{9}{2}(1+i)^2 = -6+6i.$

Módulo: $|-6+6i| = 6\,|-1+i| = 6\sqrt{2}$. Argumento: $\arg(-1+i) = \frac{3\pi}{4}$.

Forma exponencial: $6\sqrt{2}\, e^{\frac{3\pi}{4}i}$.

Nombre y apellidos: ______________ S O L U C I O N E S ______________ DNI: ______________

Pregunta 2

(2 pt.)

Sea A la matriz canónica de la aplicación lineal $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ definida por:

$$f(x, y, z, t) = (x - 2y + 3z\,,\ 2y + 4z - 6t\,,\ 2x + 14z - 12t)$$

(0.75 pt.) (a) Halla una base y la dimensión del espacio columna de A (es decir, del espacio imagen de f).

(0.75 pt.) (b) Halla una base y la dimensión del espacio nulo de A (es decir, del núcleo de f).

(0.5 pt.) (c) ¿Existe algún vector $\mathbf{x}$ en $\mathbf{R}^4$ tal que $f(\mathbf{x}) = (0, 2, 4)$? ¿Cuál?

Solución:

(a) La matriz de la aplicación lineal f es $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & 0 & 14 & -12 \end{pmatrix}$.

La ponemos en forma escalonada mediante operaciones elementales de filas: $F_3 - 2F_1$ seguida de $F_3 - 2F_2$ se transforma en:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & 0 & 14 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -6 \\ 0 & 4 & 8 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - 2F_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hay 2 columnas pivote, luego la dimensión del espacio columna es 2. Las columnas pivote son la 1 y la 2, luego una base del espacio columna está formada por las columnas 1 y 2 de A:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(b) En la forma escalonada de A hay 2 columnas no pivote, luego la dimensión del espacio nulo es 2. Para hallar una base del espacio nulo de A resolvemos el sistema homogéneo correspondiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 + F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & -6 \\ 0 & 2 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{x} = z \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad \text{Luego una base de Nul}\, A \text{ es:} \quad \left\{ \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(c) Como $(0, 2, 4)$ es un múltiplo de la última columna de A:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = -\tfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -12 \end{pmatrix},$$

existe $\mathbf{x}$ tal que $f(\mathbf{x}) = (0, 2, 4)$. Por ejemplo $\mathbf{x} = (0, 0, 0, -\frac{1}{3})$.

Nombre y apellidos: ______________ S O L U C I O N E S ______________ DNI: ______________

Pregunta 3

(1.5 pt.)

Halla, si existe, la factorización LU de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & -7 & 6 \end{pmatrix}$.

Solución:

Comenzamos buscando una forma escalonada de A

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & -7 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 + \frac{1}{2}F_1} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & -4 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 + 2F_2} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como hemos podido hallarla usando solamente operaciones elementales de fila progresivas, la factorización existe y las matrices U y L son:

$$U = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nombre y apellidos: ______________ S O L U C I O N E S ______________ DNI: ______________

Pregunta 4

(1 pt.)

Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(0.25 pt.) (a) ¿Es el sistema de ecuaciones lineales $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ incompatible? Razona la respuesta.

(0.5 pt.) (b) Halla una solución aproximada del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ por mínimos cuadrados.

(0.25 pt.) (c) Halla el error $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|$ en la solución aproximada $\mathbf{x}$ hallada.

Solución:

(a) El determinante de la matriz ampliada es $\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4 - 1 \neq 0$, luego tiene rango 3, que es mayor que el número de columnas de la matriz de coeficientes. Luego el sistema es incompatible.

(b) Resolvemos $A^{\mathrm{T}} A\mathbf{x} = A^{\mathrm{T}}\mathbf{b}$, cuya matriz ampliada es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2}F_2]{\frac{1}{3}F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Luego la solución por mínimos cuadrados es: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

(c) $A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A\mathbf{x} - \mathbf{b} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, luego el error es:

$$\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\| = \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4 + 1} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Nombre y apellidos: ______________ S O L U C I O N E S ______________ DNI: ______________

Pregunta 5

(1.5 pt.)

Halla la aproximación de rango uno de la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Solución:

La aproximación de rango 1 es: $A_1 = A\mathbf{v}_1\mathbf{v}_1^{\mathrm{T}}$, donde $\mathbf{v}_1$ es cualquier autovector unitario de máximo autovalor de

$$A^{\mathrm{T}}A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Hallamos los autovalores: $(5-\lambda)(2-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 7\lambda + 6$. $\lambda = \frac{1}{2}\big(7 \pm \sqrt{49-24}\big) = \frac{1}{2}\big(7 \pm 5\big)$, $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 1$. Necesitamos un autovector unitario de $\lambda_1 = 6$:

$$\begin{pmatrix} 5-6 & -2 \\ -2 & 2-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}. \quad x_1 = -2x_2, \quad \mathbf{x} = x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora calculamos:

$$\mathbf{v}_1\mathbf{v}_1^{\mathrm{T}} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_1 = A\mathbf{v}_1\mathbf{v}_1^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 10 & -5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nombre y apellidos: ______________ S O L U C I O N E S ______________ DNI: ______________

Pregunta 6

(2 pt.)

Sea la matriz real simétrica

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -4 & -2 \\ 2 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(0.25 pt.) (a) ¿Por qué se puede afirmar que A es diagonalizable?

(0.75 pt.) (b) Calcula los autovalores de A.

(1 pt.) (c) Halla una *diagonalización ortogonal* de A, es decir, una diagonalización $A = PDP^{-1}$ en la que los autovectores (columnas de P) sean ortonormales.

Solución:

(a) Porque es una matriz simétrica.

(b) $$\det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 2-\lambda & -4 & -2 \\ 2 & -4 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & -2 & 2 & -\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 - F_4} \det\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & \lambda \\ -2 & 2-\lambda & -4 & -2 \\ 2 & -4 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & -2 & 2 & -\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{C_4 + C_1}$$

$$\det\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2-\lambda & -4 & -4 \\ 2 & -4 & 2-\lambda & 4 \\ 0 & -2 & 2 & -\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3 - C_4} \det\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2-\lambda & 0 & -4 \\ 2 & -4 & -\lambda-2 & 4 \\ 0 & -2 & \lambda+2 & -\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - F_4} \det\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2-\lambda & 0 & -4 \\ 2 & -6 & 0 & 4-\lambda \\ 0 & -2 & \lambda+2 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_2 + C_4} \det\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -\lambda-2 & 0 & -4 \\ 2 & -\lambda-2 & 0 & 4-\lambda \\ 0 & -\lambda-2 & \lambda+2 & -\lambda \end{pmatrix} = -(-\lambda)(\lambda+2)(-\lambda-2)(4-\lambda+4).$$

Luego los autovalores son $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = -2$ (doble) y $\lambda_3 = 0$.

(c) La diagonalización ortogonal será $A = [\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2\ \mathbf{u}_3\ \mathbf{u}_4] \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} [\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2\ \mathbf{u}_3\ \mathbf{u}_4]^{\mathrm{T}}$ donde $\mathbf{u}_1$ es un autovector unitario de $\lambda_1 = 8$, $\mathbf{u}_2$ y $\mathbf{u}_3$ son autovectores unitarios y ortogonales de $\lambda_2 = -2$ y $\mathbf{u}_4$ es un autovector unitario de $\lambda_3 = 0$.

Hallamos $\mathbf{u}_1$: Ponemos la matriz característica $A - 8I$ en forma escalonada reducida:

$$\begin{pmatrix} -8 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 2-8 & -4 & -2 \\ 2 & -4 & 2-8 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & -6 & -4 & -2 \\ 2 & -4 & -6 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & -8 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{de donde:} \quad \mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Hallamos $\mathbf{u}_2$ y $\mathbf{u}_3$: Ponemos la matriz característica $A + 2I$ en forma escalonada reducida:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & -4 & -2 \\ 2 & -4 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{de donde:} \quad \mathbf{u}_2 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \sqrt{\tfrac{2}{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix},$$

Hallamos $\mathbf{u}_4$: Ponemos la matriz característica $A + 0I$ en forma escalonada reducida:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -4 & -2 \\ 2 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{de donde:} \quad \mathbf{u}_4 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$