

Ex. Final conv. 1

15 de diciembre de 2014, 10:00h – Aula B003

(2 pt.) **1.** Sea el sistema de ecuaciones lineales con coeficientes complejos (i es la unidad imaginaria, $i = \sqrt{-1}$):

$$ix + y - z = 0$$

$$iy + z = i$$

$$ix - y + iz = 1$$

(0.75 pt.) (a) Halla una forma escalonada de la matriz ampliada del sistema.

(0.75 pt.) (b) ¿Es dicho sistema compatible? ¿Tiene solución única?. Resuélvelo expresando las soluciones en forma binómica.

(0.5 pt.) (c) Sean los vectores de $\mathbf{C}^3$, $\mathbf{v} = (-2i, -\frac{1}{2} + \frac{3i}{2}, \frac{3}{2} + \frac{3i}{2})$ y $\mathbf{w} = (-i, -1 + 3i, 3 + 3i)$. Calcular el número $\mathbf{v}^T \mathbf{w}$ expresándolo en forma exponencial.

(2 pt.) **2.** Sea A la matriz canónica de la aplicación lineal $f : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^3$ definida por:

$$f(x, y, z, t) = (x - 2y + 3z, 2y + 4z - 6t, 2x + 14z - 12t)$$

(0.75 pt.) (a) Halla una base y la dimensión del espacio columna de A (es decir, del espacio imagen de f).

(0.75 pt.) (b) Halla una base y la dimensión del espacio nulo de A (es decir, del núcleo de f).

(0.5 pt.) (c) ¿Existe algún vector $\mathbf{x}$ en $\mathbf{R}^4$ tal que $f(\mathbf{x}) = (0, 2, 4)$? ¿Cuál?

(1.5 pt.) **3.** Halla, si existe, la factorización LU de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & -7 & 6 \end{pmatrix}$.

(1 pt.) **4.** Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(0.25 pt.) (a) ¿Es el sistema de ecuaciones lineales $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ incompatible? Razona la respuesta.

(0.5 pt.) (b) Halla una solución aproximada del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ por mínimos cuadrados.

(0.25 pt.) (c) Halla el error $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|$ en la solución aproximada $\mathbf{x}$ hallada.

(1.5 pt.) **5.** Halla la aproximación de rango uno de la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

(2 pt.) **6.** Sea la matriz real simétrica

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -4 & -2 \\ 2 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(0.25 pt.) (a) ¿Por qué se puede afirmar que A es diagonalizable?

(0.75 pt.) (b) Calcula los autovalores de A .

(1 pt.) (c) Halla una *diagonalización ortogonal* de A , es decir, una diagonalización $A = PDP^{-1}$ en la que los autovectores (columnas de P) sean ortonormales.
