Álgebra lineal
Evaluación continua
Grupo C
4 de Noviembre de 2015

1. **3 ptos** En el siguiente ejercicio, tanto en el enunciado como en la resolución, los asteriscos indican que el coeficiente que subyace es distinto de cero y los espacios en blanco son cero. Las matrices $(A_i|b_i)$ denotan la matriz ampliada del sistema de ecuaciones $A_i x = b_i$. Considérense las matrices

$$(A_1|b_1) = \left(\begin{array}{cccc|c} & & & & * \\ & & & & \\ & & & & \\ * & & & & * \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{4\times 5}(\mathbb{R}) \ , \quad (A_2|b_2) = \left(\begin{array}{ccc|c} * & & & \\ & & * & * \\ & * & * & * \\ * & * & * & \\ * & * & & \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{5\times 4}(\mathbb{R}) \ ,$$

$$(A_3|b_3) = \left(\begin{array}{cccc|c} * & * & * & * & * \\ & & * & * & \\ & & * & * & * \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{3\times 5}(\mathbb{R}) \ , \quad (A_4|b_4) = \left(\begin{array}{cccc|c} * & & & * & * \\ & * & * & & \\ * & * & * & * & \\ * & * & & * & * \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{4\times 5}(\mathbb{R}) \ ,$$

$$(A_5|b_5) = \left(\begin{array}{cccc|c} * & & & & * \\ & & & * & * \\ * & & * & * & \\ * & * & * & * & * \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{4\times 5}(\mathbb{R}) \ , \quad (A_6|b_6) = \left(\begin{array}{ccc|c} * & * & * & * \\ & & * & * \\ & * & * & * \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R}) \ ,$$

Se pide:

1) *0.5 ptos* Añadir a la matriz $(A_1|b_1)$, si es posible, 11 asteriscos para obtener la matriz ampliada de un sistema que necesariamente resulte compatible determinado.
2) *0.5 ptos* Quitar de la matriz $(A_2|b_2)$, si es posible, 5 asteriscos para obtener la matriz ampliada de un sistema que necesariamente resulte compatible indeterminado.
3) *0.5 ptos* Añadir a la matriz $(A_3|b_3)$, si es posible, 2 asteriscos para obtener la matriz ampliada de un sistema que necesariamente resulte compatible determinado.
4) *0.5 ptos* Quitar de la matriz $(A_4|b_4)$ el menor número posible de asteriscos para obtener la matriz ampliada de un sistema que necesariamente resulte incompatible.
5) *0.5 ptos* Añadir la matriz $(A_5|b_5)$ el menor número posible de asteriscos para obtener la matriz ampliada de un sistema que no necesariamente sea compatible determinado.
6) *0.5 ptos* Añadir a la matriz $(A_6|b_6)$, si es posible, 1 asterisco para obtener la matriz ampliada de un sistema que necesariamente resulte bien compatible determinado, bien compatible indeterminado o bien incompatible.

NOTA: Tanto en los casos en los que se pide sea posible como en los que no, las respuestas deben ir acompaadas de una correcta justificación.

2. **6 ptos** Sea $n \in \mathbb{N}$ un número múltiplo de 3. Considérese la matriz $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ dada por

$$M = \begin{pmatrix} 1+\alpha & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & \dots & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1+\alpha & -1 & 1 & -1 & -1 & \dots & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1+\alpha & 1 & -1 & -1 & \dots & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1+\alpha & -1 & -1 & \dots & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1+\alpha & -1 & \dots & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1+\alpha & \dots & 1 & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & \dots & 1+\alpha & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & \dots & 1 & -1+\alpha & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & \dots & 1 & -1 & -1+\alpha \end{pmatrix}.$$

Considérese asimismo la aplicación lineal $f\colon x \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^6$ definida por

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -x_2 - x_3 \\ x_3 \\ x_2 \\ -x_1 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

a) *1 pto* Calcular $\det(M)$.

b) *0.25 ptos* ¿Para qué valores de α es M inversible?.

c) Para $\alpha = 3$, sea $A \in \mathcal{M}_{4\times 6}(\mathbb{R})$ la submatriz de M formada por los coeficientes comunes a las cuatro primeras filas y a las seis primeras columnas de M. Se pide:

c1) *0.75 ptos* Dar la dimensión y una base de $\mathrm{Ker}(A)$.

c2) *2.5 ptos* Sea $U = \mathrm{Im}(f)$. Dar la dimensión y una base de U, de $U \cap \ker(A)$ y de $U + \ker(A)$.

c3) *1.5 ptos* Obtener la factorización LU de A y usar dicha factorización para resolver el sistema $Ax = b$ siendo $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

3. **1 pto** Sean $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ y $B = I - A$. Demostrar que A es ortogonal si y sólo si $BB^t = B + B^t$.