

Nombre y apellidos: _____

DNI: _____

preg. 1	preg. 2	preg. 3	preg. 4	preg. 5
no escribir aquí	no escribir aquí	no escribir aquí	no escribir aquí	no escribir aquí
sobre 2	sobre 2	sobre 2	sobre 2	sobre 2

no escribir en esta caja
nota sobre 10

Eval. cont. 3, Grupo B - Para hacer en casa

Fecha de entrega: 25 de noviembre de 2015

(2 pt.) **1.** Para la matriz A que aparece a la derecha calcula y contesta lo siguiente:

(0.5 pt.) (a) Halla la traza y el determinante.

(0.5 pt.) (b) Halla el polinomio característico y el espectro.

(0.5 pt.) (c) Halla una base del espacio propio del autovalor $\lambda = 2$.(0.5 pt.) (d) ¿Es A diagonalizable? (contesta razonadamente).

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -8 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -5 \\ 4 & 0 & -11 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(2 pt.) **2.** Demuestra las siguientes proposiciones e indica claramente cuál es el vector $\mathbf{v}$ del apartado (c):

(.5 pt.) (a) Toda matriz cuadrada tiene los mismos autovalores, con las mismas multiplicidades algebraicas y geométricas, que su traspuesta.

(.5 pt.) (b) Para toda matriz diagonalizable, su traspuesta y su inversa (si existe) también son diagonalizables.

(1 pt.) (c) Si M es una matriz $n \times n$ con todas las filas iguales, entonces M tiene un autovector obvio, $\mathbf{v}$. Ese vector $\mathbf{v}$ es también un autovector de cualquier matriz $n \times n$ en la que todas las filas sumen el mismo número α (aunque las filas no sean iguales) ¿Cuál es el autovalor de $\mathbf{v}$?(2 pt.) **3.** Demuestra que la matriz A dada a continuación es diagonalizable y halla una diagonalización de ella,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 63 & -18 & -18 \\ 0 & 1 & 20 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 9 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 28 & -6 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2 pt.) **4.** Dados dos números reales a, b y un entero $n \geq 2$, definimos la matriz $A_n(a, b)$ como la matriz $n \times n$ cuyos elementos de la diagonal son todos iguales a a , mientras que todos los demás son iguales a b :

$$A_n(a, b) = \begin{pmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{pmatrix}.$$

(0.5 pt.) (a) Expresa $A_n(a, b)$ como una combinación lineal de la identidad I_n y la matriz $J_n = A_n(1, 1)$. Deduce de ello la fórmula de un autovalor, λ_1 , de $A_n(a, b)$.(0.5 pt.) (b) Suponiendo $b \neq 0$, halla una base del espacio propio de λ_1 .(0.5 pt.) (c) Usa la propiedad del autovalor obvio de una matriz todas cuyas filas suman lo mismo para hallar la fórmula de un segundo autovalor, λ_2 , de $A_n(a, b)$. Deduce las multiplicidades algebraicas de λ_1 y λ_2 , y discute la diagonalizabilidad de $A_n(a, b)$.(0.5 pt.) (d) Deduce de lo anterior el polinomio característico de $A_n(a, b)$ y úsalo para demostrar que el determinante de $A_n(a, b)$ está dado por la fórmula: $\det(A_n(a, b)) = (a - b)^{n-1}(a + (n - 1)b)$.(2 pt.) **5.** Para cada uno de los enunciados que aparecen a continuación, indica si es verdadero o falso marcando "V" o "F" la casilla correspondiente. ¡Cuidado! Respuestas erróneas cuentan negativamente.Nota para los enunciados 42 y 46: La expresión " A es semejante a B " significa que $A = PBP^{-1}$ para alguna matriz P .

Nombre y apellidos: _____ DNI: _____

1. ☐ El espacio propio de un autovalor de A es un espacio nulo de A .
2. ☐ Si 0 es un autovalor de A , su espacio propio es el espacio nulo de A .
3. ☐ Si $\det A \neq 0$, entonces el espacio nulo de A es un espacio propio de A .
4. ☐ Si A es invertible, entonces el espacio nulo de A es un espacio propio de A .
5. ☐ El espacio nulo de una matriz puede ser un espacio propio de esa matriz.
6. ☐ Si A es una matriz cuadrada, y $\text{Nul } A$ no es cero, entonces es un espacio propio de A .
7. ☐ Si $\text{Nul } A$ no es cero, entonces 0 no es un valor propio de A .
8. ☐ Los valores propios de una matriz están en su diagonal principal.
9. ☐ Un método para calcular los valores propios de A consiste en hallar una forma escalonada de A .
10. ☐ Puede ser difícil encontrar un vector propio de una matriz cuadrada A , pero es fácil comprobar si un vector dado es un vector propio.
11. ☐ Si $\mathbf{v}_1$ es un vector propio de A entonces $c\mathbf{v}_1$ también es un vector propio de A .
12. ☐ Si $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son vectores propios de A entonces $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ también es un vector propio de A .
13. ☐ Si $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son vectores propios de A que corresponden a valores propios diferentes, entonces son linealmente independientes.
14. ☐ Si $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son vectores propios de A y son linealmente independientes, entonces corresponden a valores propios diferentes.
15. ☐ Si $\mathbf{x}$ es un vector propio de A correspondiente a un valor propio λ y $B = P^{-1}AP$, entonces $P^{-1}\mathbf{x}$ es un vector propio de B también correspondiente a λ .
16. ☐ Si $\mathbf{x}$ es un vector propio de A correspondiente a un valor propio λ y $B = P^{-1}AP$, entonces $P\mathbf{x}$ es un vector propio de B también correspondiente a λ .
17. ☐ Si A es una matriz cuadrada y $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ para algún número no nulo λ , entonces $\mathbf{x}$ es un vector propio de A .
18. ☐ Si A es una matriz cuadrada y $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ para algún vector $\mathbf{x}$, entonces el número λ es un valor propio de A .
19. ☐ Si A es una matriz cuadrada y $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ para algún vector no nulo $\mathbf{x}$, entonces el número λ es un valor propio de A .
20. ☐ Si A es una matriz cuadrada y $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ para algún número no nulo λ , entonces el número λ es un valor propio de A .
21. ☐ Si A es una matriz cuadrada y $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ para algún número λ , entonces el número λ es un valor propio de A .
22. ☐ Si A es una matriz $n \times n$ y $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ para algún vector $\mathbf{x}$, entonces $\mathbf{x}$ es un vector propio de A .
23. ☐ Si A es una matriz cuadrada y $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ para algún vector no nulo $\mathbf{x}$, entonces $\mathbf{x}$ es un vector propio de A .
24. ☐ Si una matriz $n \times n$ tiene n vectores propios linealmente independientes, también los tiene su traspuesta.
25. ☐ Si $AP = PD$, con D diagonal, entonces todas las columnas de P son vectores propios de A .
26. ☐ Si 0 no es un autovalor de una matriz cuadrada A entonces A es invertible.
27. ☐ Una matriz cuadrada A es invertible si, y sólo si, 0 no es un valor propio de A .
28. ☐ Si una matriz cuadrada tiene un vector propio entonces tiene infinitos vectores propios.
29. ☐ Todo vector que no cambia cuando se le multiplica por la izquierda una matriz es un vector propio de esa matriz.
30. ☐ Todo espacio propio de A tiene una base de vectores propios de A .

31. ☐ Un número c es un valor propio de A si, y sólo si, la ecuación $(A - cI)\mathbf{x} = 0$ tiene una solución única.
32. ☐ Si $A - cI$ es invertible entonces c no es un autovalor de A .
33. ☐ Si c es un autovalor de A entonces $A - cI$ es invertible.
34. ☐ Una operación de reemplazo de filas en A no altera los valores propios.
35. ☐ Si $AP = PD$, con P invertible y D diagonal, entonces A es diagonalizable.
36. ☐ A es diagonalizable si $AP = PD$ para alguna matriz diagonal D y alguna matriz P .
37. ☐ Para poder diagonalizar una matriz $n \times n$ es necesario que tenga n vectores propios independientes.
38. ☐ Para poder diagonalizar una matriz $n \times n$ es necesario que tenga n valores propios distintos.
39. ☐ Si A es una matriz $n \times n$ y $\mathbf{R}^n$ tiene una base de vectores propios de A , entonces A es diagonalizable.
40. ☐ Si A es diagonalizable e invertible, entonces también lo es A^{-1} .
41. ☐ Si A no es diagonalizable, entonces no es invertible.
42. ☐ Si A es diagonalizable entonces toda matriz semejante a A también lo es.
43. ☐ Si A es diagonalizable y P es invertible entonces la matriz $D = P^{-1}AP$ es diagonal.
44. ☐ Si A es invertible, entonces es diagonalizable.
45. ☐ Si A es diagonalizable, entonces es invertible.
46. ☐ Si A es semejante a B , entonces A^3 es semejante a B^3 .
47. ☐ Si A es una matriz 3×3 que sólo tiene dos valores propios distintos y cada espacio propio es unidimensional, entonces A no es diagonalizable.
48. ☐ Si A es una matriz 4×4 que sólo tiene dos valores propios distintos y sólo se sabe que el espacio propio de un autovalor es tridimensional, entonces A puede no ser diagonalizable.
49. ☐ Si A es una matriz 4×4 que sólo tiene tres valores propios distintos y tiene un espacio propio bidimensional, entonces es posible que A no sea diagonalizable.
50. ☐ Si A es una matriz 5×5 que sólo tiene dos valores propios distintos y el espacio propio de un autovalor es tridimensional y el del otro bidimensional, entonces A es diagonalizable.
51. ☐ Si A es una matriz 5×5 que sólo tiene tres valores propios distintos y el espacio propio de un autovalor es tridimensional, entonces A es diagonalizable.
52. ☐ Si una matriz $n \times n$ es diagonalizable, entonces tiene n valores propios distintos.
53. ☐ Si una matriz $n \times n$ tiene n valores propios distintos, entonces es diagonalizable.
54. ☐ Por el teorema de Cayley-Hamilton, si A es una matriz cuadrada y $p(x)$ es un polinomio, entonces $p(A)$ es una matriz nula.
55. ☐ Si A es una matriz cuadrada y $p(x)$ es un polinomio, entonces $p(A)$ tiene los mismos autovalores que A .
56. ☐ Si A es una matriz cuadrada y $p(x)$ es un polinomio, entonces $p(A)$ tiene los mismos autovectores que A .
57. ☐ Si A es una matriz cuadrada y $p_A(x)$ es el polinomio característico de A , entonces $p_A(A) = \mathbf{0}$.
58. ☐ Si A es $n \times n$, entonces el teorema de Cayley-Hamilton implica que A es igual a una combinación lineal de las potencias $A^2, \dots, A^n$.
59. ☐ Si A anula a su polinomio característico, entonces A es diagonalizable.
60. ☐ Si A no es diagonalizable entonces A no anula a su polinomio característico.
-