Examen Final

12 de enero de 2016, 10:00 a 12:00h

---

1. Dados los números complejos $z_1 = 2-2i$, $z_2 = 6i$, $z_3 = -2-2i$, $z_4 = \sqrt{3}$.

(a) Expresa dichos cuatro números en forma exponencial.

(b) Calcula y expresa en forma exponencial los tres números $\dfrac{z_1}{z_2}$, $\dfrac{z_1}{z_3}$, $z_4 + \dfrac{z_1}{z_3}$.

(c) Calcula el número: $\operatorname{Im}\left(\dfrac{z_1\bar{z}_2 + z_1\bar{z}_3}{(\bar{z}_3)^2}\right)$.

---

2. Considera el sistema de ecuaciones lineales dado a la derecha.

(a) Halla la solución general de ese sistema.

(b) Halla una base del espacio solución del sistema homogéneo asociado.

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - x_3 &= 4 \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 &= 2 \\ -x_1 - 2x_2 - 2x_4 + x_5 &= -5 \end{aligned}$$

---

3. Sea la matriz 6×6, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y el vector de $\mathbf{R}^6$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Contesta razonadamente: ¿Es $\mathbf{v}$ un autovector de A?. En caso afirmativo, ¿cuál es su autovalor?

(b) Contesta razonadamente: ¿Cuál es el rango de A?

(c) Sabiendo que todos los autovalores de A tienen la misma multiplicidad algebraica, halla el espectro de A.

(d) Halla una base de cada uno de los subespacios propios asociados a los autovalores de A.

---

4. Los siguientes tres productos de matrices parecen descomposiciones en valores singulares, pero sólo uno lo es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{-2}{\sqrt{10}} & \frac{2}{\sqrt{10}} & \frac{-1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{15}} & \frac{2}{\sqrt{15}} & \frac{3}{\sqrt{15}} & \frac{1}{\sqrt{15}} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{-2}{\sqrt{10}} & \frac{2}{\sqrt{10}} & \frac{-1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{15}} & \frac{2}{\sqrt{15}} & \frac{3}{\sqrt{15}} & \frac{1}{\sqrt{15}} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{-2}{\sqrt{10}} & \frac{2}{\sqrt{10}} & \frac{-1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{15}} & \frac{2}{\sqrt{15}} & \frac{3}{\sqrt{15}} & \frac{1}{\sqrt{15}} \end{pmatrix}.$$

(a) Explica razonadamente cuáles no lo son y justifica que el restante lo es.

(b) ¿Cuál es el tamaño de la matriz A cuya descomposición en valores singulares está dada arriba?

(c) ¿Cuál es el rango de A?

(d) Escribe una base ortonormal del espacio nulo de A (núcleo de la aplicación lineal definida por A).

(e) Escribe una base ortonormal del espacio nulo de A^{T} (núcleo de la aplicación lineal definida por A^{T}).

(f) Calcula las aproximaciones de rango uno y de rango dos de A.

(g) Escribe la matriz A sin calcular el producto de las tres matrices.
