Ex. Final, Segunda Edición

1 de julio de 2016, 16:00 a 18:30h – Aula B003

---

1. Calcula el valor que han de tener de los números reales α y β para que se cumpla

$$\alpha - 2i = \sqrt{2}\,(-2+\beta i)\,e^{\frac{5\pi}{4}i}.$$

---

2. Sea $f:\mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^4$ la aplicación lineal definida en $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ por:

$$f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_2 + x_3 - x_4 + x_5 \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_5 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 \end{pmatrix}.$$

(a) Escribe la matriz canónica, A, de f y halla la forma escalonada reducida de A.

(b) Halla las ecuaciones cartesianas del espacio columna de A, $\operatorname{Col} A = \operatorname{Im} f$. ¿Pertenece el vector $(1, 0, -2, 1)$ a $\operatorname{Im} f$?

(c) Halla una base y la dimensión de $\operatorname{Col} A = \operatorname{Im} f$ y lo mismo de $\ker f = \operatorname{Nul} A$.

---

3. Considera los siguientes productos de matrices:

(i) $$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(ii) $$B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

(iii) $$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

(a) Explica razonadamente por qué se puede afirmar que (i) es una diagonalización ortogonal de A y que (ii) y (iii) no lo son de sus respectivos resultados. ¿Cuál es el rango de A?

(b) Escribe una base del espacio nulo de A.

(c) Escribe los valores singulares de A.

(d) Escribe un vector de $\mathbf{R}^4$ que sea ortogonal a todos los vectores del espacio nulo de A.

---

4. Sea $\omega:\mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$ la forma cuadrática definida en $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ por:

$$\omega(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_3 + 4x_3^2 + 4x_1x_4 + 2x_3x_4 + 4x_4^2.$$

(a) Escribe la matriz A (simétrica) de esta forma cuadrática.

(b) Clasifica dicha forma cuadrática. Contesta razonadamente: ¿Es degenerada?.

(c) Calcula la proyección ortogonal del vector $\mathbf{v} = (1, 1, 1, 1)$ sobre el espacio generado por las dos primeras columnas de A.
