Nombre y apellidos: ________ S O L U C I O N E S ________ DNI: ____________

Evaluación continua 1 – Grupo B

21 de sep de 2016, 11:00 a 12:00h – Aula B003

Pregunta 1

(3.5 pt.)

Calcula la forma binómica y la forma exponencial de los siguientes números complejos y represéntalos gráficamente en un sistema de ejes cartesianos (dibuja *un solo par de ejes para los dos puntos*):

$$z = \frac{-1+3i}{2-i}, \qquad w = \frac{(9+5i)-(5-7i)}{(1-3i)-(3+3i)}.$$

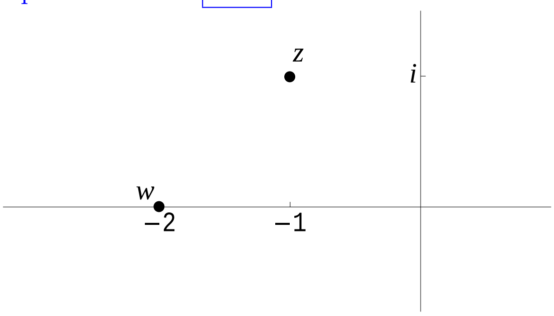
Solución:

$$z = \frac{-1+3i}{2-i} = \frac{(-1+3i)(2+i)}{4+1} = \frac{-5+5i}{5} = \boxed{-1+i}.$$

$|z| = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}$, $\arg(z) = \frac{3\pi}{4}$. Forma exponencial: $z = \boxed{\sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}}$.

$$w = \frac{(9+5i)-(5-7i)}{(1-3i)-(3+3i)} = \frac{4+12i}{-2-6i} = \frac{2+6i}{-1-3i} = \frac{(2+6i)(-1+3i)}{1+9} = \frac{-2-18-6i+6i}{1+9} = \frac{-20}{10} = \boxed{-2}.$$

$|w| = 2$, $\arg(z) = \pi$. Forma exponencial: $w = \boxed{2\, e^{i\pi}}$.



Nombre y apellidos: ______________ **S O L U C I O N E S** ______________ DNI: ______________

Pregunta 2

(3 pt.)

Halla las soluciones de la siguiente ecuación de tercer grado:

$$z^3 - 6z^2 + (9 - 2i)z = 0.$$

Solución:

Como no tiene término independiente, una solución es $\boxed{z_1 = 0}$. Las otras dos se hallan resolviendo $z^2 - 6z + 9 - 2i = 0$

$$z_{2,3} = 3 \pm \sqrt{9 - 9 + 2i} = 3 \pm \sqrt{2i} = 3 \pm (1 + i). \qquad \boxed{z_2 = 4 + i}, \quad \boxed{z_3 = 2 - i}.$$

Nombre y apellidos: ______________ **S O L U C I O N E S** ______________ DNI: ______________

Pregunta 3

(3.5 pt.)

Expresa en forma binómica las cuatro raíces cuartas del número

$$z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i.$$

Solución:

Primero hallamos el módulo: $|z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$. Vemos que z es un complejo de módulo uno y nos damos cuenta de que sus partes real e imaginaria son menos coseno de 60° y menos seno de 60°, luego su argumento es $\arg(z) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$. Otra forma de hallarlo es buscar el ángulo θ tal que

$$\cos\theta = -\frac{1}{2}, \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

el cual es uno de los ángulos notables, pero en el segundo cuadrante: $\theta = 120° = \frac{2\pi}{3}$.

La raíz cuarta básica tiene módulo 1 y argumento $\left(\frac{2\pi}{3}\right)/4 = \frac{\pi}{6}$, lo cual nos da el número $e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$. Como las raíces cuartas de la unidad son $1, i, -1, -i$, las cuatro raíces cuartas de z son:

$$\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i}, \quad \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) i = \boxed{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}, \quad \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)(-1) = \boxed{-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i}, \quad \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)(-i) = \boxed{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}.$$