Nombre y apellidos: _________ **S O L U C I O N E S** _________ DNI: ___________

Evaluación continua 3 – Grupo B

23 de nov de 2016, 11:00 a 12:00h – Aula B003

Pregunta 1

(3 pt.)

Considera los siguientes subespacios de $\mathbf{R}^4$ definidos por las ecuaciones que se indican:

$$H : \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 0. \end{cases} \qquad K : \begin{cases} x_2 = 0, \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

(1 pt.) (a) Halla una base de K.

(1 pt.) (b) Halla una base del espacio intersección $H \cap K$.

(1 pt.) (c) Halla una base del espacio suma $H + K$.

Solución:

(a) **Una forma**: Los vectores de K son los vectores de $\mathbf{R}^4$ de la forma

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto los vectores $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$ generan K y como son independientes forman una base de K.

Otra forma: Para hallar una base de K resolvemos el sistema homogéneo de ecuaciones que lo definen. La matriz de coeficientes es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la cual ya está en forma escalonada reducida. Las variables libres son x_1 y x_3 y la solución es

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

con lo que hallamos la misma base que antes.

(b) **Una forma**: Los vectores de $H \cap K$ son los vectores de $\mathbf{R}^4$ que cumplen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ y $x_4 = 0$, lo cual significa que son de la forma

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto el vector $(0, 0, 1, 0)$ constituye una base de $H \cap K$.

Otra forma: Para hallar una base de $H \cap K$ resolvemos el sistema homogéneo de ecuaciones que lo definen. La matriz de coeficientes es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la cual ya está en forma escalonada reducida. La única variable libre es x_3 y la solución es

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

con lo que hallamos la misma base que antes.

(c) **Una forma**: El espacio suma $H+K$ tiene dimensión

$$\dim(H+K) = \dim H + \dim K - \dim(H \cap K) = 2 + 2 - 1 = 3$$

por tnto es un subespacio de $\mathbf{R}^4$ definido por una sola ecuación. Todos los vectores de H y de K cumplen la ecuación $x_2 = 0$, por tanto esta es la ecuación que define $H+K$ y los vectores de $H+K$ son los vectores de $\mathbf{R}^4$ de la forma

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto los vectores $(1,0,0,0)$, $(0,0,1,0)$, $(0,0,0,1)$, dado que son independientes, constituyen una base de $H+K$.

Otra forma: El espacio suma $H+K$ está generado por una base de H unida a una base de K. Ya tenemos una base de K; buscamos una base de H: Los vectores de H son de la forma

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \\ x_1 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto los vectores $(0,0,1,0)$ y $(0,0,0,1)$ generan K y como son independientes forman una base de K. Luego, juntando una base de H con una base de K obtenemos como generadores de $H+K$ los vectores

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Como estos tres vectores son independientes, constituyen una base de $H+K$.

Nombre y apellidos: ______________ **S O L U C I O N E S** ______________ DNI: ______________

Pregunta 2

(3.5 pt.)

Considera la aplicación lineal $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definida por

$$T(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ -4x_1 - 6x_2 - 8x_3 \end{pmatrix}$$

(1 pt.) (a) Halla una base del núcleo de T.

(1.5 pt.) (b) Halla una base, $\mathcal{B}$, y también las ecuaciones del espacio imagen de T.

(1 pt.) (c) ¿Pertenece el vector $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$ al espacio imagen de T? En caso afirmativo halla sus coordenadas relativas a la base $\mathcal{B}$.

Solución:

(a) El núcleo de T está definido por $T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ o, si A es la matriz canónica de T, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Calculamos la forma escalonada reducida de A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ -4 & -6 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2 - 2F_1]{F_3 + 2F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

luego el vector $(1, -2, 1)$ constituye una base del núcleo de T.

(b) Una base del espacio imagen está formada por las columnas pivote de A, que, por lo visto antes son las columnas 1 y 2, luego una base del espacio imagen de T es

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} \right\}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}.$$

Para hallar las ecuaciones, hallamos una forma escalonada de

$$(A|\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & x_1 \\ 2 & 3 & 4 & x_2 \\ -4 & -6 & -8 & x_3 \end{pmatrix}.$$

Podemos conseguirlo con las operaciones $F_3 + 2F_2$ y $F_2 - 2F_1$ usadas en el apartado (a), con lo cual obtenemos que las ecuaciones son: $\boxed{x_3 + 2x_2 = 0}$ (sólo una ecuación).

(c) $\mathbf{e}_1$ pertenece a la imagen de T si y sólo si satisface la ecuación $x_3 + 2x_2 = 0$, la cual se cumple porque $\mathbf{e}_1$ tiene $x_2 = x_3 = 0$. Para hallar las coordenadas de $\mathbf{e}_1$ relativas a la base $\mathcal{B}$ tenemos que resolver el sistema de matriz ampliada $(B|\mathbf{e}_1)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -4 & -6 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2 - 2F_1]{F_3 + 2F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Por tanto $[\mathbf{e}_1]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Comprobación: $-3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+4 \\ -6+6 \\ 12-12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{e}_1.$

Nombre y apellidos: ______________ **S O L U C I O N E S** ______________ DNI: ______________

Pregunta 3

(3.5 pt.)

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(0.5 pt.) (a) Contesta razonadamente: ¿Cuál es el rango de A? ¿Qué se deduce de ello acerca de los autovalores de A y sus multiplicidades?.

(1 pt.) (b) ¿Es la tercera columna de A un autovector de A?. ¿Qué se deduce de ello acerca de los autovalores y sus multiplicidades?

(1 pt.) (c) Contesta razonadamente: A la vista de los resultados anteriores, ¿se dispone de suficiente informacón para decir si A es diagonalizable o no?

(1 pt.) (d) Evalúa el polinomio $p(x) = x^5 - 4x^4 + 3x^3$ en la matriz A.

Solución:

(a) El rango de A es 2 (sólo hay dos filas independientes). De ello se deduce que cero es un autovalor de A con multiplicidad geométrica igual a $5 - 2 = 3$.

(b) Si $\mathbf{a}_3$ es la tercera columna de A, entonces operando se obtiene $A\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_3$. Esto nos dice que $\mathbf{a}_3$ es un autovector de A con autovalor 1.

Como ya teníamos un autovalor con multiplicidad geométrica igual a 3, la multiplicidad del autovalor 1 sólo podría ser 1 (si los autovalores fuesen $\{0, 0, 0, 1, \lambda\}$ con $\lambda \neq 1$) o 2 (si los autovalores fuesen $\{0, 0, 0, 1, 1\}$).

Como la traza de A es igual a 4, los autovalores solo pueden ser $\{0, 0, 0, 1, 3\}$.

(c) Como aparte del autovalor cero hay dos autovalores distintos más, la multiplicidad algebraica del autovalor cero no puede ser mayor que 3. Los otros dos autovalores tienen multiplicidad algebraica 1 y por tanto también multiplicidad geométrica 1. Así pues, todos los autovalores de A tienen multiplicidad geométrica igual a la algebraica y por tanto A es diagonalizable.

(d) Como A es diagonalizable y sus autovalores son $\{0, 0, 0, 1, 3\}$, existe una P inversible tal que

$$A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1} \quad \text{lo que implica} \quad p(A) = P \begin{pmatrix} p(0) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p(0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p(0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p(1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p(3) \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Por tanto, es necesario evaluar el polinomio en cada autovalor. Claramente $p(0) = 0$. Además $p(1) = 1 - 4 + 3 = 0$ y $p(3) = 3^5 - 4 \times 3^4 + 3 \times 3^3 = 3^4(3 - 4 + 1) = 0$. Por tanto $p(A)$ es igual a la matriz nula 5×5.